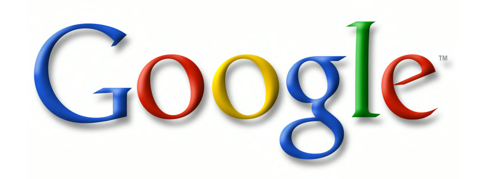
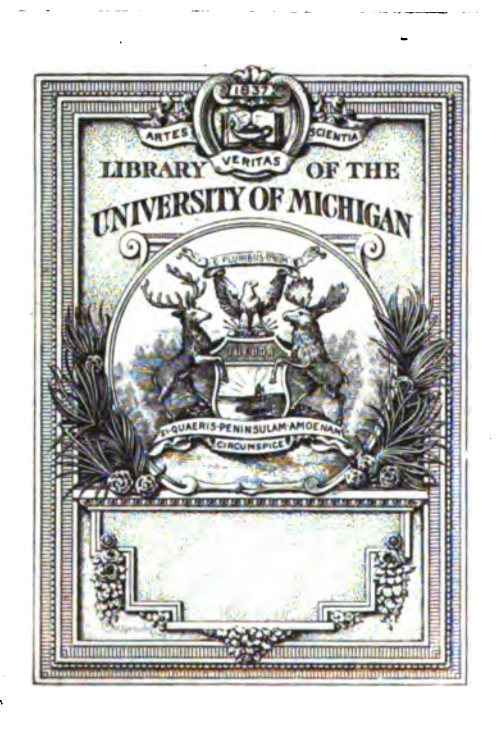
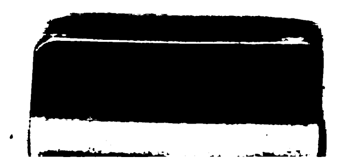



B 467981




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1852.

On souscrit aussi

A ANGOULÊME..	chez Perez-Lecler.
BORDEAUX...	— Chaumas.
BOURGES.....	— Vermeil.
BREST........	— Mme Vve Lefournier.
LILLE.......	— Vanackère.
LORIENT......	— Leroux-Cassart.
LYON	— Perisse frères.
	— Brun et Cie.
MARSEILLE...	— Mme Vve Camoin.
METZ.........	— Warion.
MONTPELLIER.	— Séwalle.
NANCY.......	— G. Grimblot et Cie.
NANTES......	— Forest aîné.
	— Guéraud.
ORLÉANS.....	— Gatineau.
RENNES......	— Verdier.
ROCHEFORT...	— Mme Fleury.
	— Proust-Branday.
ROUEN.......	— Lebrument.
STRASBOURG. .	— Treuttel et Wurtz.
	— Mme Levrault.
	— Derivaux.
TOULON......	— Monge.
TOULOUSE....	— Mlles Gallon sœurs.
	— Privat.
	— Gimet.
LEIPSIG.....	— Michelsen.
LONDRES....	— Baillière.
	— Dulau et Cte, Soho-Square.
MADRID.....	— Bonnat, Sarvy et Cie.
	— Monier.
TURIN......	— Bocca.
VIENNE.....	— Rohrmann.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Nationales d'Artillerie,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME ONZIÈME.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1852.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

LETTRE SUR LE THÉORÈME DE PYTHAGORE.

Monsieur le rédacteur,

Vous m'avez fait l'honneur de me demander, en faveur de vos jeunes lecteurs, un aperçu historique sur ce fameux théorème portant le nom de Pythagore (*), qui consiste en ce que *Le carré construit sur l'hypoténuse*

(*) Le plus illustre et le plus ancien des philosophes de la Grèce : il vivait vers le milieu du VIe siècle avant J.-C.

Pour satisfaire à votre demande, je vous proposerai l'étymologie suivante du nom de *Pythagore*. Πυθαγόρας peut se déduire : 1° du mot Πύθων, *Python*, nom du serpent combattu et tué par Apollon, d'où l'adjectif générique πύθιος, puis le surnom Πύθιος, *Pythien*, donné à Apollon, et enfin Πυθώ, *Delphes*, ville consacrée à Apollon Pythien au nom duquel s'y rendaient, comme on le sait, des oracles célèbres dans toute la Grèce ; 2° du mot ἀγορεύω, *haranguer, parler en public*, d'où le dérivé verbal ἀγόρας qui, toutefois, n'existe point isolément, et dont le sens serait celui d'*orateur*, d'homme *qui parle en public*.

Ainsi, par analogie avec Εὐαγόρας, *qui parle bien*, Πινυταγόρας, *qui parle sagement*, et d'autres noms analogues, de même que Χρησμηγόρης (forme poétique et ionienne), pour Χρησμαγόρας, signifie *celui qui prononce des oracles*, ou *qui parle comme l'oracle*, de même Πυθαγόρας peut, à la rigueur, s'interpréter : *celui qui parle comme Apollon Pythien* ou *au nom d'Apollon Pythien, le Verbe, la Voix d'Apollon Pythien*.

On interpréterait d'une manière analogue les noms Ἀθηναγόρας, Διαγόρας, Ἑρμαγόρας, etc., où figurent, au lieu du surnom d'Apollon, les noms de

d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.

Plusieurs auteurs modernes ont traité cette question (*), et je n'aurai, pour vous satisfaire, que bien peu de chose à ajouter à leurs récits.

Commençons par le dire; il y a beaucoup d'exagération dans la manière dont on raconte les détails merveilleux de cette célèbre découverte, et la part qui en revient à l'illustre philosophe, si l'on s'en rapporte aux témoignages les plus dignes de foi, doit sans aucun doute être de beaucoup réduite.

Clavius, géomètre du commencement du XVIIe siècle (*Euclidis elementorum libri* XV, etc. *Francofurti*, 1607),

---

Minerve, de Jupiter, de Mercure, etc. (Conf. LETRONNE, Mémoire sur les noms propes grecs, *Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, tome XIX, 1re partie.)

Observons d'ailleurs, comme confirmation partielle, que suivant Malchus ou Porphyre (*Vie de Pythagore*, chap. II, p. 5; Amsterdam, 1707), lequel invoque lui-même le témoignage d'un certain Apollonius (Apollonius de Tyane si l'on s'en rapportait à Suidas, mais ceci n'est rien moins que certain): suivant Malchus donc, la mère de Pythagore se nommait Pythaïs, et son père naturel était Apollon lui-même, bien qu'il eût Mnésarque pour père putatif.

(*) *Voyez* principalement *E.-H. Stöber*: Dissertatio mathematica de theoremate pythagorico; Argentor., 1743. — *Voyez* encore *F.-Chr. Jetze*: Diss. inaug. philos. mathematica sistens theor. Pythagorici demonstr. plures; Halæ-Magd., 1752. — *J.-W. Müller*: System. zusammenstell. der wichtigen bisher bekannten Beweise des Pythag. Lehrsatzes; Nürnberg, 1819. — *J.-J.-I. Hoffmann*: Der Pythagor. Lehrs. mit 32 theils bekannten, theils neuen Beweisen; Mainz, 1821.

Au reste, ces trois derniers auteurs s'occupent presque exclusivement de démontrer le théorème par divers moyens, à l'exception toutefois de Müller, qui traite succinctement de l'historique en suivant Stoëber. Quant aux démonstrations diverses, celui-ci en donne quinze, Jetze vingt-trois, Müller dix-huit, sans compter les cas particuliers, les généralisations, remarques, etc., et Hoffmann trente-cinq, en comptant trois démonstrations postérieurement ajoutées. On peut voir encore *J.-G. Camerer*: Euclidis Elem. libri 6 priores, gr. et lat.; Berlin, 1824. On y trouvera, tome I, page 443, plusieurs démonstrations non comprises dans les précédentes.

me paraît s'être fait une idée assez juste à cet égard; et je commencerai, pour fixer les idées, par rapporter ses propres paroles, ou du moins une traduction, aussi exacte qu'il m'est possible de la faire, du passage qui exprime son opinion : « L'invention, dit-il, de ce beau, » de cet admirable théorème, est attribuée à Pythagore, » qui, comme l'écrit Vitruve (*) au IXe livre de son » *Architecture*, offrit un sacrifice aux Muses en recon- » naissance de la brillante découverte qu'elles lui avaient » inspirée. Quelques auteurs pensent qu'il immola » cent bœufs (**); mais, s'il faut s'en rapporter à Pro- » clus (***), c'est un bœuf seulement qu'il offrit. Or, » probablement, comme on le croit, ce fut l'étude des » nombres qui conduisit Pythagore à la découverte de son » théorème. C'est-à-dire qu'ayant considéré avec une pro- » fonde attention les propriétés des nombres 3, 4, 5, et » ayant observé que le carré numérique du plus grand » d'entre eux était égal aux carrés (****) numériques des » deux autres, il forma un triangle scalène dont le plus » grand côté était divisé en cinq parties égales, le plus petit » en trois parties égales aux premières, et, enfin, le côté » moyen en quatre des mêmes parties. Puis, cela fait, il » examina l'angle compris entre ces deux derniers côtés, » et reconnut que c'était un angle droit. Il remarqua la » même propriété dans beaucoup d'autres nombres,

(*) Vitruve vivait au commencement de notre ère.

(**) C'est pourquoi le théorème était anciennement connu sous le nom d'*hécatombe*, ou de *théorème des cent bœufs*. On l'a appelé aussi le *maître de la mathématique*, et plus simplement et par excellence le *théorème de Pythagore*.

(***) Philosophe et commentateur, vivait au milieu du ve siècle de notre ère. Il a fait (en grec), sur les Éléments d'Euclide, quatre livres de commentaires qui ont été traduits en latin par Barocci (Padoue, 1560).

(****) C'est-à-dire *à la somme des carrés*. Cette inexactitude de langage est fréquente chez les Anciens. Que la remarque en soit faite ici une fois pour toutes.

» comme 6, 8, 10; 9, 12, 15; etc. C'est pourquoi il
» jugea convenable de rechercher si, dans tout triangle
» rectangle, le carré du côté opposé à l'angle droit ne
» serait pas égal aux carrés des deux autres côtés, de la
» même manière que tous les triangles dont les côtés
» étaient entre eux comme les nombres susdits, présen-
» taient un angle droit. Et c'est ainsi qu'à force de re-
» cherches, il parvint, avec une satisfaction indicible,
» à cet admirable théorème, dont il démontra ensuite la
» vérité par des raisonnements inattaquables. Cependant
» Euclide (*) (liv. VI, prop. 31) donna à cette même
» propriété une extension prodigieuse, en faisant voir
» qu'elle appartenait également à des figures semblables
» quelconques, etc. »

Quant au passage de Vitruve, mentionné par Clavius, en voici également la traduction en ce qui regarde la partie historique, la seule qui nous intéresse en ce moment :

« Pythagore, dit cet auteur, a fait connaître une ma-
» nière de tracer l'angle droit sans employer l'équerre
» des ouvriers; et cet instrument, que les artistes les
» plus habiles parviennent à peine à construire exacte-
» ment, le philosophe, par ses procédés de démonstra-
» tion, nous explique une méthode pour le tracer dans

(*) Célèbre géomètre de la fin du IVe siècle avant J.-C., auteur des *Éléments de Géométrie* qui forment la base de l'enseignement de cette science dans toutes les écoles. Proclus, dans son commentaire cité plus haut (page 7), énumère (à la page 19), à partir de Thalès, non pas treize auteurs d'Éléments qui auraient précédé Euclide, comme Delambre le dit à tort dans une note surajoutée à l'article que Daunou a consacré à Proclus dans la *Biographie universelle de Michaud*, mais bien vingt-deux auteurs qui avaient écrit sur la géométrie et sur son histoire. Plusieurs parmi eux rédigèrent des Éléments : Hippocrate de Chio, inventeur de la quadrature des *Lunules* qui portent son nom, fut le premier de tous (Ve siècle avant J.-C.); vient ensuite Léon, maître de Néoclide, Theudius de Magnésie, et peut-être encore d'autres.

» la perfection. Cette méthode consiste à prendre trois » règles, l'une de trois pieds, une autre de quatre, et la » troisième de cinq, etc. »

Vitruve énonce ici les propriétés des aires carrées construites sur les trois côtés du triangle rectangle formé par les trois règles; et il termine en disant que « Pythagore, » ne doutant pas que sa découverte ne fût une inspira- » tion des Muses, leur offrit les plus grandes actions de » grâces, et même, à ce que l'on dit, leur sacrifia des » victimes. »

Telles sont les paroles de Vitruve. Mais allons plus loin, et voyons ce que d'autres auteurs disent de cette découverte de Pythagore, ainsi que de diverses autres inventions également attribuées à l'illustre philosophe. Voici la version de Plutarque (qui vivait un siècle après Vitruve), dans le livre où il montre *Que l'on ne saurait vivre heureux en suivant la doctrine d'Épicure :* « Pytha- » gore, dit-il, sacrifia un bœuf au sujet d'une figure de » géométrie, comme le dit Apollodote :

« Pythagoras, après qu'il eut trouvé
» Le noble écrit pour lequel bien prouvé,
» Il fit d'un bœuf solennel sacrifice,... (*)

» soit qu'il s'agisse ici de la proposition suivant laquelle » la puissance (**) de l'hypoténuse est égale à celles des » côtés de l'angle droit, soit du problème relatif à *l'aire* » *de la parabole* (***). »

On voit ici mentionnée, sous le nom de Pythagore, la quadrature de la parabole. Diogène de Laërte, venu un siècle après Plutarque, en répétant l'épigramme (****)

(*) Trad. d'Amyot.

(**) Le mot δύναμις, *puissance*, signifie ici *le carré*.

(***) Pour le sens de ce mot, *voyez* Proclus, dans son *Commentaire* sur le I[er] livre d'Euclide, l. IV, p. 109, scholie sur la prop. 44.

(****) En langage moderne, *épigramme* ne signifie pas autre chose qu'*inscription*.

d'Apollodote, qu'il nomme Apollodore, ne fait point mention de la parabole : « Apollodore le *logisticien,* » dit-il (*Vie de Pythagore,* VIII, 12), « rapporte qu'il » sacrifia une hécatombe après avoir trouvé que l'hypo- » ténuse du triangle rectangle a la même puissance que » les deux autres côtés; et, à ce sujet, il cite cette » épigramme : Pythagore, etc., » [à peu de chose près dans les mêmes termes (*)].

Athénée, contemporain de Diogène de Laërte, répète à peu près les paroles de cet auteur, tant pour le récit que pour l'épigramme. Notons pourtant en passant, que le titre d'*arithméticien*, ἀριθμητικός, donné à Apollodore dans le récit d'Athénée (éd. Casaubon, p. 418), y remplace celui de *logisticien*, λογιστικός (**), employé par Diogène. Or, dans le langage de Platon (***) (*voir* le Gorgias), la *logistique,* science des rapports, diffère essentiellement de l'*arithmétique,* science des nombres effectifs. Au surplus, ceci est sans aucune importance pour la question qui nous occupe; mais ce qui mérite attention, c'est que le même Diogène de Laërte rapporte d'après Pamphile (****), que Thalès de Milet (*****), « après avoir appris la géométrie chez les Égyptiens, fut » le premier qui démontra l'inscription du triangle rec- » tangle dans le demi-cercle, et qu'à cette occasion il

---

(*) *Voyez* encore l'*Anthologie des épigrammes grecques,* liv. I.

(**) Signalons encore l'expression ἡ ὑποτείνουσα (πλευρὰ) τὴν ὀρθὴν γωνίαν, l'*hypoténuse de l'angle droit,* c'est-à-dire *le côté qui sous-tend l'angle droit;* mais, en général, ces variantes n'intéressent que les hellénistes de profession.

(***) Florissait du IVe au Ve siècle avant notre ère.

(****) Femme célèbre qui florissait sous Néron.

(*****) Le plus ancien des mathématiciens grecs, philosophe et astronome; il vivait au commencement du VIe siècle avant notre ère. C'est lui, dit Proclus dans son Commentaire (page 19), qui enseigna aux Grecs la géométrie dont il avait acquis la connaissance en visitant l'Égypte.

» sacrifia un bœuf; mais qu'au reste d'autres auteurs, » au nombre desquels on compte Apollodore le logisti- » cien, attribuent le même fait à Pythagore. »

Il y a trop d'analogie entre les deux questions dont il s'agit ici, ainsi qu'entre les deux faits attribués à Pythagore par Diogène de Laërte parlant d'après Apollodore, pour qu'une confusion entre ces deux faits, très-distincts malgré leur analogie apparente, ne soit pas extrêmement à craindre. Mais, par compensation, nous pouvons citer à la gloire de Pythagore, une troisième découverte géométrique, « certainement bien plus élégante, γλαφυρώτερον, » et bien plus digne des Muses, μουσικώτερον, » comme le dit Plutarque en la rapportant (Propos de table, liv. VIII, q. 2), que celle du théorème relatif au carré de l'hypoténuse : « c'est le théorème ou plutôt le problème dans » lequel, étant données deux figures, on se propose d'en » construire une troisième qui soit semblable à l'une des » figures données, et équivalente à la seconde, question » pour laquelle on dit aussi que Pythagore offrit un » sacrifice (*). »

Mais, pour en revenir au théorème primitif qui forme ici tout notre objet, nous voyons que le témoignage le plus ancien, celui de Vitruve, ne mentionne comme appartenant à Pythagore, que la découverte du triangle construit

(*) V. Euclide, liv. VI, prop. 25. — Proclus, au commencement du IIe liv. de son Commentaire (p. 19), dit généralement que Pythagore rattacha la géométrie à la philosophie, et en fit une science libérale qui, dès lors, fut introduite dans l'éducation. « Il voyait, dit-il, les choses de » haut, remontait aux principes, et considérait les théorèmes d'une ma- » nière abstraite et dégagée de toute idée matérielle. Ainsi il établit la » théorie des quantités *incommensurables* et celle des *figures cosmiques* » (polyèdres réguliers). Enfin le même Proclus, d'après Eudème le péripatéticien (fin du IVe siècle avant J.-C.), attribue encore à Pythagore (p. 99), ou du-moins à son école, la découverte de la trente-deuxième proposition du Ier livre d'Euclide, savoir, que *La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

sur les côtés 3, 4, 5, triangle qui resta célèbre dans toute l'antiquité, à l'exclusion de tout autre, pour ses propriétés remarquables et le caractère en quelque sorte sacré qu'on lui attribua. Ainsi, outre la propriété commune à tous les triangles rectangles, relative aux carrés de ses côtés, son aire est égale à 6; et le cube de cette aire est égal à la somme des cubes de ses trois côtés (*). Aussi est-ce à lui que Platon, au VIII[e] livre de la *République*, fait allusion lorsqu'il cite le triangle dans lequel le rapport *épitrite*, c'est-à-dire le rapport du *quaternaire* au *ternaire*, est relié par le *quinaire* : ἐπίτριτος πυθμὴν πεντάδι συζυγείς. Et il faut voir avec quelle complaisance le prince des philosophes développe les propriétés et les rapports mutuels de ces nombres 3, 4, 5, 6, lorsque dans son ardeur, plus poétique que philosophique, il va jusqu'à leur attribuer une influence fatale sur la destinée des empires. Il faut voir encore avec quel sérieux Aristote (**), cet esprit si positif, entreprend (*Polit.*, liv. V, chap. 12) et poursuit comme une œuvre de la plus haute gravité, la réfutation des rêveries mystiques de son maître. Il faut voir enfin Aristide Quintilien (***) (*de la Musique*, l. III, p. 151), Plutarque en divers endroits (*Traité d'Isis et d'Osiris*, ch. 29; *de la Cessation des Oracles*, ch. 24), et bien d'autres auteurs, célébrer ses perfections, le regarder comme le plus beau des triangles, en un mot, le considérer comme le triangle rectangle par excellence (****).

(*) *V.* Stoëber, p. 27; et *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 25 janvier 1841, p. 211.

(**) Disciple de Platon et chef de l'école péripatéticienne, fin du IV[e] siècle avant notre ère.

(***) Musicographe grec, vers la fin du I[er] siècle de notre ère.

(****) Néanmoins, dans le *Timée*, c'est le triangle rectangle isocèle que Platon exalte au-dessus de tous les autres.

Mais nous possédons un renseignement dont il ne paraît pas que l'on ait encore fait usage dans la question historique que nous cherchons à éclaircir ici, et qui me semble pourtant avoir pour sa complète élucidation, une importance décisive. C'est le commentaire de Proclus sur la 47e proposition du Ier livre des Éléments d'Euclide, ayant pour objet précisément le théorème dont il s'agit, mais considéré dans toute sa généralité. Il est vrai que Proclus, qui florissait vers le milieu du ve siècle de notre ère, est déjà lui-même fort éloigné du fait qui nous occupe; mais comme nous le sommes nous-mêmes encore bien davantage, il est incontestable qu'à son époque, les renseignements devaient être bien plus nombreux et plus sûrs qu'ils ne peuvent l'être aujourd'hui. Or voici comment s'exprime Proclus dans le commentaire cité :

« Lorsqu'on entend parler de ce théorème, dit-il, il » n'est pas rare de rencontrer des gens qui, voulant mon- » trer leur science en antiquité, le font remonter à Py- » thagore, et vous parlent du sacrifice que ce philosophe » offrit pour sa découverte. Quant à moi, après avoir » rendu *aux premiers sages qui en ont reconnu la vérité,* » tout l'honneur qu'ils méritent, je n'hésite pas à dire » que je professe une admiration beaucoup plus grande » envers l'auteur de ces Éléments, non-seulement pour » y avoir attaché une démonstration de la dernière évi- » dence, mais encore pour en avoir fait ressortir, en le » soumettant à l'irrésistible puissance de sa savante ana- » lyse, un autre théorème beaucoup plus général : c'est » celui du VIe livre (pr. 31), où il démontre générale- » ment que : *Dans les triangles rectangles, toute figure* » *tracée sur l'hypoténuse est égale à la somme des* » *figures tracées sur les deux autres côtés, pourvu* » *qu'elles soient semblables à la première et sembla-* » *blement disposées.*—Observons, en effet, que tous les

» carrés sont semblables entre eux, mais que toutes les » figures rectilignes semblables entre elles ne sont pas » des carrés : car il y a une similitude propre aux triangles et à tous les autres polygones. Mais dès qu'il est » démontré que la figure construite sur l'hypoténuse, » soit carrée, soit de toute autre forme, est égale aux » figures semblables et semblablement construites sur les » autres côtés, il en résulte par cela même une démonstration plus générale et plus scientifique pour le seul » carré. On voit en même temps la raison de la généralité » de la proposition démontrée : c'est que la rectitude de » l'angle entraîne l'égalité de la figure construite sur » l'hypoténuse, par rapport à toutes les figures semblables, semblablement construites sur les deux autres » côtés, de même qu'une plus grande ouverture de l'angle, » quand il est obtus, entraîne la supériorité de la première figure, et qu'une plus petite ouverture de l'angle, » quand il est aigu, entraîne l'infériorité. Mais il ne s'agit » pas de savoir comment se démontre le théorème du » VIe livre ; c'est ce que l'on verra en son lieu. Quant à » présent, bornons-nous à examiner comment la proposition actuelle peut être vraie, sans davantage nous » occuper de généraliser, puisque nous n'avons encore » rien enseigné sur la similitude des figures planes, ni » rien démontré entièrement sur les analogies (proportions). Au reste, beaucoup de questions que nous » avons ainsi traitées partiellement, ont pu être généralisées par la même méthode, tandis que l'auteur des » Éléments les démontre par la théorie commune des » parallélogrammes.

» Comme il y a deux sortes de triangles rectangles, savoir, des triangles isocèles et des triangles scalènes, parlons d'abord des premiers. Mais il est impossible, dans » ces sortes de triangles, de trouver des nombres entiers

» qui s'accordent avec les côtés : car il n'y a point de nombre » carré qui soit double d'un autre nombre carré, à moins » qu'on ne veuille dire que c'est à une unité près, comme » le carré de 7, qui est le double du carré de 5 diminué » d'*un*. Dans les triangles scalènes au contraire, il est » possible de trouver des nombres convenables : car nous » avons démontré avec évidence que le carré de l'hypo- » ténuse est égal à la somme des carrés des côtés qui » comprennent l'angle droit; et nous avons un exemple » d'un pareil triangle dans le *Traité de la République,* » où les deux côtés de l'angle droit étant 3 et 4, l'hypo- » ténuse vaut 5. En effet, le carré de 5 est 25, nombre » égal à la somme des nombres 9, carré de 3, et 16, carré » de 4. Ainsi la question considérée dans les nombres » est suffisamment éclaircie. Or, la tradition nous a con- » servé certaines méthodes pour trouver de pareils trian- » gles; l'une d'elles est attribuée à Platon, une autre à » Pythagore. Dans celle-ci, on commence par prendre » un nombre impair pour représenter le petit côté de » l'angle droit; on l'élève au carré; en retranchant une » unité et prenant la moitié, on a pour résultat le plus » grand des deux côtés de l'angle droit; au contraire, en » ajoutant une unité au carré et prenant la moitié, on a » l'hypoténuse. Ainsi je prends le nombre 3; j'en forme » le carré, j'ai 9; je retranche 1, j'ai 8; je prends la » moitié, j'ai 4 : c'est le grand côté de l'angle droit. Je » reprends le carré 9 et j'ajoute 1, j'ai 10; je prends la » moitié, j'ai 5 : c'est l'hypoténuse; et j'ai un triangle » rectangle formé des côtés 3, 4, 5.

» Dans la méthode de Platon, on commence par des » nombres pairs. Prenant donc le nombre pair donné, » on le pose comme l'un des côtés de l'angle droit, puis » on le divise par 2 et l'on forme le carré de la moitié; » en ajoutant une unité, on a l'hypoténuse; au con-

» traire, en retranchant une unité, on a le second côté » de l'angle droit. Ainsi je prends le nombre 4; je le » divise par 2, et je forme le carré, ce qui reproduit le » même nombre 4. Retranchant une unité, j'ai 3; l'a- » joutant, au contraire, j'ai 5; et je retrouve ainsi » le même triangle déjà obtenu par la première mé- » thode. En effet, c'est la même chose de commencer » par 3 ou par 4; mais ceci est étranger à la question (*).

» Quant à la démonstration de l'auteur (la démonstra- » tion d'Euclide), comme elle est très-claire, je pense » qu'il serait superflu d'y rien ajouter, et que l'on peut » se contenter de ce qui est écrit; car toutes les fois que » l'on a voulu ajouter quelque chose, comme on le voit » dans Héron (**) et dans Pappus (***), on a été obligé » de recourir aux démonstrations du VIe livre, et cela » sans aucune nécessité. Passons donc à ce qui suit. » (Suit le commentaire sur la proposition réciproque.)

Quoique ce long commentaire contienne beaucoup de détails étrangers à la question actuelle, j'ai cru devoir le citer en entier, saisissant cette occasion de donner ainsi aux lecteurs une idée de la manière de Proclus. Mais il présente aussi certaines circonstances qui me paraissent résoudre le débat dans le sens de Clavius. On y voit, en effet, dès le début, que Proclus est loin de regarder Pythagore comme étant exclusivement l'auteur de la décou-

---

(*) Nous engageons les élèves à réduire en formules algébriques les procédés de Pythagore et de Platon.

(**) Héron d'Alexandrie, célèbre géomètre du commencement du IIe siècle avant J.-C., s'est occupé surtout de la Géométrie pratique. On distingue plusieurs géomètres de ce nom.

(***) Autre géomètre célèbre, de la fin du IVe siècle de notre ère. Il a composé, en grec, huit livres de Collections mathématiques, dont une grande partie nous est parvenue, mais est encore inédite; la traduction latine de cette partie, par Commandin (Bologne, 1660), a seule été publiée intégralement.

verte dont il s'agit, et surtout comme ayant établi la proposition qui en est l'objet, avec le degré de généralité qu'elle a dans Euclide; car, bien que ce soit principalement en vue du théorème du VIe livre, que cet auteur est loué et admiré par son commentateur, il n'en est pas moins évident que celui-ci ne se serait pas exprimé comme il le fait, si seulement il avait cru pouvoir attribuer à Pythagore l'équivalent de la 47e proposition du Ier livre d'Euclide. Mais ce n'est pas tout : on voit ici que Pythagore s'est occupé de la décomposition d'un nombre carré en deux autres nombres carrés, et qu'il a donné un procédé (procédé *très-particulier*) pour trouver des nombres satisfaisant à une semblable relation. En y réfléchissant un peu, n'est-on pas naturellement conduit à supposer que Pythagore, après avoir reconnu les propriétés remarquables d'un premier triangle rectangle, aura voulu, pour essayer la généralité du résultat qu'il avait obtenu, varier les exemples de triangles qui eussent entre eux les mêmes relations que les nombres obtenus par le procédé qu'il prescrit, afin de s'assurer *empiriquement* que tous ces triangles étaient également rectangles? Ce procédé n'est-il pas, je le demande, aussi conforme à la marche de la science, qu'il l'est à l'opinion de Clavius? Mais il est bien difficile de croire que, n'ayant pas trouvé de formule plus générale pour la décomposition des carrés, Pythagore pût avoir acquis la conviction mathématique de la vérité du théorème de géométrie dont il est question.

Quoi qu'il en soit, la discussion à laquelle nous venons de nous livrer semble devoir assurer à Euclide l'honneur d'avoir donné la première démonstration générale et complète de la proposition relative au carré de l'hypoténuse; et elle nous montre, par un exemple remarquable, comment les ténèbres que le temps amoncelle autour des faits,

en viennent à nous les faire apercevoir sous un aspect et une couleur qui rendent la vérité entièrement méconnaissable. Et ce n'est pas seulement sur le théorème lui-même qu'une pareille altération s'est produite ici : on peut voir que la même réaction a eu lieu à l'égard de cette tradition d'un pompeux sacrifice offert aux dieux, tradition restée définitivement attachée au récit de la découverte qui est censée en avoir été l'occasion. En effet, suivant le récit de Diogène de Laërte, ce sacrifice ne fut pas moindre qu'une hécatombe; mais, d'après Plutarque, plus ancien d'un siècle que Diogène de Laërte, nous devons réduire l'offrande à un seul bœuf; et enfin, dans d'autres récits plus circonspects encore, on ne voit plus employer que les expressions βουθυσία, βουθυτεῖν, ou simplement θῦσαι, qui, en définitive, en vertu d'une catachrèse, ne signifient absolument plus qu'un sacrifice quelconque. Et en effet, « comment veut-on », dit Cicéron (*de la Nature des Dieux*, liv. III), « me faire accroire que » Pythagore eût pu sacrifier un bœuf en l'honneur des » Muses, lorsqu'il est constant, au contraire, qu'il refusa » d'immoler une victime sur l'autel d'Apollon Délien, » voulant éviter ainsi de répandre le sang? »

Cette incrédulité de l'orateur romain, Suidas (*) la justifie en ces termes : « Pythagore (**), dit-il, défendit » d'immoler aux dieux des victimes sanglantes : on ne » devait se prosterner que devant un autel immaculé. »

Au milieu de ces contradictions, nous trouvons cependant un moyen de concilier les témoignages; et ce moyen, c'est Porphyre (***) (ou Malchus, *Vie de Pythagore*,

---

(*) Grammairien et compilateur, de la fin du xe siècle de notre ère.

(**) *V.* ce mot dans Suidas.

(***) Il vivait dans la dernière moitié du IIIe siècle de notre ère.

ch. 36) qui vient nous l'offrir; écoutons cet auteur : « Les sacrifices qu'il offrait aux dieux, dit Porphyre, » n'avaient rien de cruel. Pour apaiser les dieux, il » offrait des pains, des gâteaux, de l'encens, de la » myrrhe, mais jamais d'animaux...... Les auteurs les » plus dignes de foi disent qu'il offrit un bœuf de pâte » de froment après avoir découvert que la puissance de » l'hypoténuse du triangle rectangle était égale à celles » des deux autres côtés. »

Au reste, ce genre d'offrande ou de sacrifice était d'un usage très-commun dans l'antiquité, principalement chez les pythagoriciens. Ainsi, au rapport d'Athénée (*Banquet des Sages*, liv. I, § 3), « Empédocle d'Agrigente (*), vainqueur aux jeux olympiques dans la course des chevaux, » devant, en sa qualité de pythagoricien, s'abstenir de » toute nourriture animale, fit préparer un bœuf factice » assaisonné de myrrhe, d'encens et d'autres parfums » précieux, et le fit distribuer à la foule assemblée de » tous les points de la Grèce pour assister au concours. »

Philostrate (**) [dans la *Vie d'Apollonius* (***), l. I, ch. 1er], et, d'après lui, Suidas, parlent dans le même sens : « Le bœuf de pâte qu'il fit, à ce que l'on dit, dis- » tribuer à Olympie sous forme de gâteaux, prouve » bien qu'il était de la secte de Pythagore (****). »

Ainsi, en résumé, on voit que cette fameuse héca-

(*) Philosophe qui vivait vers le milieu du ve siècle avant J.-C.

(**) Fin du IIe siècle de notre ère.

(***) Apollonius de Tyane, célèbre thaumaturge : milieu du Ier siècle de notre ère.

(****) Liebhard, dans une dissertation sur l'angle inscrit dans le demi-cercle, prétend expliquer le fait en litige en supposant que l'offrande d'un bœuf ou de cent bœufs doit s'entendre d'autant de pièces de monnaie sur lesquelles les Athéniens représentaient un bœuf, dont, par suite, elles prenaient le nom.

tombe, sur laquelle on a fait tant de commentaires, se réduit à un bœuf.... de pain d'épice.

Agréez, monsieur le rédacteur, etc.,

A.-J.-H. VINCENT,
De l'Institut national.

P. S. — Je crois devoir ajouter ici une Note relative à la décomposition d'un nombre carré en deux autres nombres carrés, problème dont il a été parlé plus haut. Nous avons dit que la solution de Pythagore était *très-particulière*; celle de Platon, qui la complète sous un certain rapport, l'est également. M. Biot, dans deux articles sur les *Gromatici veteres* (Arpenteurs romains), insérés aux cahiers d'avril et mai 1849 du *Journal des Savants*, a donné, sur la généralisation de cette solution, des détails curieux que nous devons recommander aux lecteurs. L'illustre géomètre a également traité la question, mais avec plus de détails, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (7 mai 1849). Il y rappelle la 32e proposition du Ier livre de Diophante (*), qui a un but analogue, et la page 426 du remarquable ouvrage de M. Chasles, intitulé : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Ce savant mathématicien donne dans son ouvrage, une règle de *Brahmegupta* (**), qui revient à celle de Diophante, et comprend comme cas particuliers les deux règles données par Pythagore et Platon. Enfin, M. Poinsot

(*) Célèbre mathématicien grec du IVe siècle de notre ère. On a de lui six livres (sur treize qu'il avait composés) de questions arithmétiques, et un livre sur les nombres polygones. Ils ont été publiés pour la première fois par Bachet de Méziriac (Paris, 1621), et depuis, avec de savants commentaires, par l'illustre Fermat (Toulouse, 1670).

(**) Géomètre indien du VIe ou VIIe siècle de notre ère.

(même séance de l'Académie des Sciences) a donné, pour la décomposition d'un carré en deux autres, une méthode aussi générale que simple.

A cette occasion, je me permettrai d'indiquer aussi une méthode très-générale, qui, en ne distinguant ni les nombres pairs des nombres impairs, ni le plus petit et le plus grand des deux carrés partiels, a, par conséquent, l'avantage de les traiter symétriquement.

Pour satisfaire à l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

faisons

$$x = k + a, \quad y = k + b, \quad z = k + a + b;$$

la transformation sera toujours possible (*) : car, de ces relations, on tire

$$a = z - y, \quad b = z - x, \quad k = x + y - z,$$

valeurs entières et positives en même temps que x, y, z. Substituant dans l'équation proposée, on a, toute simplification faite,

$$k^2 = 2ab.$$

Il suffit donc, pour avoir toutes les solutions de la question, et, par conséquent, tous les triangles possibles en nombres entiers, de prendre pour k tous les nombres pairs possibles, et de décomposer k^2 de toutes les manières possibles en deux facteurs dont l'un devra être fait égal à $2a$ (ou $2b$), et l'autre à b (ou a). Comme, d'ailleurs, on peut se borner à chercher les triangles *primitifs*, c'est-à-dire les triangles dont les côtés sont représentés par des nombres premiers entre eux (car les autres se ramènent à ceux-là), on aura égard aux seules décompositions dans lesquelles les facteurs de k^2 sont premiers entre eux, et

(*) Elle est également applicable à l'équation $x^m + y^m = z^m$.

par conséquent l'un pair et l'autre impair. Avec cette restriction, l'un des nombres a ou b, et par suite l'un des côtés de l'angle droit, x ou y, est lui-même toujours nécessairement pair et l'autre impair, et par suite, z, ou l'hypoténuse, est toujours impair.

Par exemple, soit

$$k = 2, \text{ d'où } k^2 = 4, \ a = 2, \ b = 1:$$

il en résulte

$$x = 4, \quad y = 3, \quad z = 5.$$

Soit encore

$$k = 4, \text{ d'où } a = 8, \ b = 1:$$

il en résulte

$$x = 12, \quad y = 5, \quad z = 13.$$

Et ainsi de suite.

L'hypothèse $k = 6$ donnerait les deux triangles 8, 15, 17, et 7, 24, 25; etc., etc.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. TERQUEM,

PAR M. J.-A. SERRET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

« J'ai eu plusieurs fois l'occasion de constater, en fai-
» sant les examens d'admission à l'École Polytechnique,
» que les candidats ne connaissent que des démonstra-
» tions défectueuses, à tous égards, des formules sur
» lesquelles repose la construction des Tables de loga-
» rithmes. Peut-être jugerez-vous utile, au point de vue
» de l'enseignement, et dans l'intérêt des candidats, de
» publier les détails que je vous envoie à ce sujet. »

I.

Développement en série de $-\,l\,(1-u)$, *où* u *est un nombre positif inférieur à* 1.

Soit x une quantité que nous ferons varier depuis $x=0$ jusqu'à $x=u$; u est une constante positive inférieure à 1. Posons

$$(1)\qquad f(x) = -\,l(1-x)\ [*];$$

la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ a pour valeur $\frac{1}{1-x}$, et l'on peut écrire

$$(2)\qquad f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Posons aussi

$$(3)\qquad \varphi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n},$$

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$; on aura

$$(4)\qquad \varphi'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

En retranchant l'équation (4) de l'équation (2), il vient

$$f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Le second membre de cette équation est positif, et il est moindre que $\frac{x^n}{1-u}$, tant que x n'est pas égal à u; on a donc

$$(5)\qquad f'(x) - \varphi'(x) > 0,$$

$$(6)\qquad f'(x) - \varphi'(x) - \frac{x^n}{1-u} < 0.$$

---

[*] La caractéristique l désigne exclusivement les logarithmes népériens, c'est-à-dire ceux dont la base est $e = 2,71828\ldots$

Ces inégalités montrent que les fonctions $f(x)-\varphi(x)$ et $f(x)-\varphi(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, sont, la première croissante, la deuxième décroissante, quand x croît de o à u. En effet, la première de ces fonctions a une dérivée constamment positive (inégalité 5), tandis que la deuxième a une dérivée constamment négative (inégalité 6). D'ailleurs les fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x=0$, donc, pour $x=u$, la première est positive et la deuxième est négative. Ainsi on a

$$f(u)-\varphi(u)>0,$$
$$f(u)-\varphi(u)-\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}<0,$$

ou

$$f(u)>\varphi(u),$$
$$f(u)<\varphi(u)+\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)};$$

c'est-à-dire que $f(u)$ est égal à $\varphi(u)$ augmenté d'une quantité positive moindre que $\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$; cette quantité peut évidemment se représenter par $\theta\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, en désignant par θ une fraction comprise entre o et 1. D'après cela, on a

$$f(u)=\varphi(u)+\frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)},$$

ou

$$(7)\qquad -l(1-u)=\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^n}{n}+\frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}.$$

La quantité u étant inférieure à 1, on voit que $\frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$ tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

$$8)\qquad -l(1-u)=\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots,$$

formule dont le second membre est une série convergente, tant que l'on a $u < 1$.

II.

Développement en série de $l(1+u)$, *où* u *est un nombre positif égal ou inférieur à* 1.

Soit x une quantité variable entre les limites 0 et u; u est une constante positive égale ou inférieure à 1. Posons

$$(1) \qquad f(x) = l(1+x);$$

la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ a pour valeur $\frac{1}{1+x}$; et l'on peut écrire ces deux égalités,

$$(2) \quad \begin{cases} f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^{n-1} \mp \dfrac{x^n}{1+x}, \\ f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^{n-1} \mp x^n \pm \dfrac{x^{n+1}}{1+x}. \end{cases}$$

Posons aussi

$$(3) \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n},$$

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$; nous aurons

$$(4) \qquad \varphi'(x) = 1 - x + x^2 - \ldots \pm x^{n-1}.$$

En retranchant l'équation (4) de chacune des équations (2), on obtient

$$(5) \qquad f'(x) - \varphi'(x) = \mp \frac{x^n}{1+x},$$

$$(6) \qquad f'(x) - \varphi'(x) \pm x^n = \pm \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Les seconds membres de ces deux équations sont de signes contraires; par conséquent, les deux fonctions $f(x) - \varphi(x)$

et $f(x) - \varphi(x) \pm \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant leurs dérivées de signes contraires, sont l'une croissante, l'autre décroissante, quand x croît de 0 à u. Or les deux fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x = 0$; donc, pour $x = u$, elles sont de signes contraires. On a donc

$$f(u) - \varphi(u) > 0,$$

$$f(u) - \varphi(u) \pm \frac{u^{n+1}}{n+1} < 0,$$

ou

$$f(u) - \varphi(u) < 0,$$

$$f(u) - \varphi(u) \pm \frac{u^{n+1}}{n+1} > 0.$$

Dans les deux cas on peut écrire, en désignant par θ un nombre positif inférieur à 1,

$$f(u) = \varphi(u) \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1}:$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \pm \frac{u^n}{n} \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1}.$$

La quantité u étant égale ou inférieure à 1, $\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro, à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

$$(8) \qquad l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots,$$

formule dont le second membre est une série convergente tant que l'on a $u < 1$ ou $u = 1$.

Remarque. Il résulte, de ce qui précède, que l'on a

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

pour toute valeur u de x comprise entre -1 et $+1$.

Cette formule a lieu encore pour $x = 1$, et même pour $x = -1$; car, dans ce cas, les deux membres sont infinis.

III.

Calcul des logarithmes népériens.

Reprenons les deux formules

$$l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots,$$

$$-l(1-u) = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots;$$

il vient, en ajoutant et observant que

$$l(1+u) - l(1-u) = l\frac{1+u}{1-u},$$

(1) $$l\frac{1+u}{1-u} = 2\left(\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right).$$

La quantité $\frac{1+u}{1-u}$ étant plus grande que 1, posons

$$\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{h}{N} = \frac{N+h}{N},$$

d'où

$$u = \frac{h}{2N+h};$$

l'équation (1) devient, en observant que

$$l\frac{N+h}{N} = l(N+h) - lN,$$

(2) $$l(N+h) = lN + 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \cdots\right].$$

Cette formule, où N et h désignent deux nombres positifs quelconques, permet de calculer $l(N+h)$ quand on connaît lN.

Si l'on néglige, dans le second membre de l'équation (2), tous les termes qui suivent $2\frac{h^{2i+1}}{(2i+1)(2N+h)^{2i+1}}$, l'erreur commise sera évidemment moindre que

$$2\frac{h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+3}}\left[1+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^4+\ldots\right],$$

c'est-à-dire moindre que

$$\frac{h^{2i+3}}{2(2i+3)N(N+h)(2N+h)^{2i+1}}.$$

En particulier, si l'on néglige, dans la série de l'équation (2), tous les termes qui suivent le premier, et que l'on écrive simplement

$$(3)\qquad l(N+h)=lN+\frac{2h}{2N+h},$$

l'erreur commise sera moindre que $\frac{h^3}{6N(N+h)(N+2h)}$, et, à plus forte raison, moindre que $\frac{1}{6}\left(\frac{h}{N}\right)^3$.

En faisant $N=1$ et $h=1$ dans l'équation (2), on obtient

$$l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\ldots\right),$$

ce qui donne, en prenant neuf décimales,

$$l2=0,693147180.$$

Le logarithme de 2 étant connu, la formule (2) permettra de calculer successivement les logarithmes népériens de tous les nombres entiers.

Faisons, par exemple, $N=8$ et $h=2$ dans l'équation (2); il vient

$$l10=l8+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\ldots\right).$$

Cette formule donne la valeur de $l10$, car $l8=3l2$;

on trouve, en prenant neuf décimales,

$$l\,10 = 2{,}302585093.$$

IV.

Calcul des logarithmes vulgaires.

Le module M des logarithmes vulgaires est l'inverse du logarithme népérien de 10; on a donc

$$M = \frac{1}{2{,}302585093},$$

ou, en effectuant la division,

$$(1) \qquad M = 0{,}434294482.$$

Le module une fois connu, il est aisé de calculer les logarithmes vulgaires des nombres. En effet, les logarithmes vulgaires, que nous dénoterons à l'aide de la caractéristique log, s'obtiennent en multipliant par M les logarithmes népériens; par conséquent, l'équation (2) du paragraphe précédent donnera

$$(2) \quad \log(N+h) = \log N + 2M\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \cdots\right].$$

En faisant $h = 1$, cette formule devient

$$(3) \quad \log(N+1) = \log N + 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots\right].$$

A l'aide de cette équation (3) on pourra calculer successivement les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, ou entre 100 et 1000, ou généralement compris entre deux puissances quelconques de 10.

On abrége considérablement les calculs en faisant usage de la méthode des différences, dont nous n'avons pas à parler ici. Les calculateurs qui ont construit les Tables que nous possédons, ont employé les équations (2) et (3), ainsi que quelques autres qui se déduisent de celles-ci par des transformations faciles, et qui renferment des séries plus convergentes. Si, par exemple, on remplace N par

$N^2 - 1$, dans l'équation (3), elle devient

$$\log N^2 = \log(N^2 - 1) + 2M\left[\frac{1}{2N^2-1} + \frac{1}{3(2N^2-1)^3} + \ldots\right],$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} \log N = \dfrac{\log(N+1) + \log(N-1)}{2} \\ \qquad + M\left[\dfrac{1}{2N^2-1} + \dfrac{1}{3(2N^2-1)^3} + \ldots\right]. \end{cases}$$

La série qui entre dans le second membre de cette équation (4) est très-convergente; en se bornant au premier terme de cette série, l'erreur que l'on commet ne peut affecter la dixième décimale, si N est égal ou supérieur à 20. L'équation (4) peut servir à calculer $\log(N+1)$ quand on connaît $\log N$ et $\log N - 1$; elle donne aussi le moyen de calculer successivement les logarithmes des nombres premiers. En effet, supposons que N soit un nombre premier, et que les logarithmes des nombres premiers inférieurs à N soient connus; l'équation (3) fera connaître $\log N$, car $N+1$ et $N-1$ étant des nombres composés de facteurs premiers inférieurs à N, leurs logarithmes s'obtiendront par de simples additions.

Pour calculer les logarithmes des premiers nombres 2, 3, etc., il faudrait prendre plusieurs termes dans la série qui entre dans le second membre de celle des formules (2), (3) ou (4) que l'on emploie; mais on peut, par des artifices convenables, obtenir pour ces cas particuliers des séries beaucoup plus convergentes, dans lesquelles on pourra se borner au premier terme, ou aux deux premiers termes. Nous allons en présenter deux exemples.

Premier exemple. *On demande le logarithme de 2 avec douze décimales.* On fera $N = 1000$ et $h = 24$, dans l'équation (2), qui devient

$$\log 1024 = \log 1000 + 2M\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \ldots\right];$$

or $1024 = 2^{10}$, $\log 1024 = 10 \log 2$, $\log 1000 = 3$; donc

$$\log 2 = 0,3 + \frac{2M}{10}\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \ldots\right],$$

et il est aisé de voir que les deux premiers termes de la série du second membre suffisent pour obtenir log 2 avec douze décimales.

SECOND EXEMPLE. *On demande le logarithme de* 3 *avec dix décimales.* On fera $N = 65536$ et $h = 74$ dans l'équation (2), qui devient

$$\log 65610 = \log 65536 + 2M\left(\frac{74}{131146} + \ldots\right);$$

or $65610 = 3^8 \times 10$, $65536 = 2^{16}$; donc

$$8 \log 3 + 1 = 16 \log 2 + 2M\left(\frac{74}{131146} + \ldots\right),$$

ou

$$\log 3 = 2 \log 2 - 0,125 + \frac{M}{4}\left(\frac{74}{131146} + \ldots\right),$$

et il est aisé de voir que le premier terme de la série du second membre suffit pour qu'on puisse calculer log 3 avec dix décimales.

Nous nous bornerons aux deux exemples qui précèdent; mais nous croyons devoir rappeler ici que M. Koralek a fait connaître récemment un procédé très-ingénieux qui permet de calculer rapidement, avec sept décimales, le logarithme vulgaire d'un nombre quelconque compris entre 1 et 10000000. La méthode de M. Koralek exige seulement que l'on connaisse le module M et les logarithmes des cinq nombres 2, 3, 7, 11, 13.

V.

Sur la proportion qu'on établit entre les petits accroissements d'un nombre et les accroissements correspondants de son logarithme.

Quand on fait usage des Tables de logarithmes, on

admet que *les petits accroissements du logarithme d'un nombre* N $>$ 10000 *sont proportionnels aux accroissements correspondants de* N.

Nous allons démontrer que l'erreur commise, en appliquant ce principe, ne peut avoir d'influence sur la septième décimale du logarithme que l'on calcule.

Nous avons établi la formule

$$l(1+u)=\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots\pm\frac{u^n}{n}\mp\frac{\theta u^{n+1}}{n+1},$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1.

Si M désigne le module des logarithmes vulgaires, on déduit, de cette formule,

$$\log(1+u)=\mathrm{M}\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots\pm\frac{u^n}{n}\mp\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}\right),$$

et, en faisant $n=1$,

$$\log(1+u)=\mathrm{M}\left(u-\frac{\theta u^2}{2}\right).$$

Posons successivement $u=\frac{1}{\mathrm{N}}$, $u=\frac{h}{\mathrm{N}}$, et désignons par α et β les valeurs comprises entre 0 et 1 que prend alors θ; on aura

$$(1)\qquad \log(\mathrm{N}+1)-\log\mathrm{N}=\mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}-\frac{\alpha}{2\mathrm{N}^2}\right),$$

$$(2)\qquad \log(\mathrm{N}+h)-\log\mathrm{N}=\mathrm{M}\left(\frac{h}{\mathrm{N}}-\frac{\beta h^2}{2\mathrm{N}^2}\right).$$

Désignons par Δ la différence tabulaire

$$\log(\mathrm{N}+1)-\log\mathrm{N};$$

et par D la différence

$$\log(\mathrm{N}+h)-\log\mathrm{N};$$

on déduira, des équations (1) et (2),

$$\mathrm{D}-\Delta h=\mathrm{M}\frac{\alpha h-\beta h^2}{2\mathrm{N}}.$$

Or nous supposons $h < 1$; $\alpha h - 6h^2$ est donc, en valeur absolue, moindre que 1 ; M est aussi plus petit que 1 et même plus petit que $\frac{1}{2}$; N^2 est au moins égal à 10000^2, c'est-à-dire au moins égal à 100000000. Donc, en prenant

$$D - \Delta h = 0,$$

c'est-à-dire en admettant la proportion

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{h}{1},$$

l'erreur que l'on commet est certainement plus petite que le quart d'une unité du huitième ordre décimal.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851 (*);

Par M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Le sujet de cette composition a été :

Trouver l'équation différentielle des courbes planes qui, enroulées sur un cylindre droit à base circulaire, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant.

Montrer que, dans le cas particulier où le rayon de première courbure est égal au rayon de la base du cylindre, l'intégration de l'équation différentielle se ramène à une simple quadrature, et discuter la formule.

Mais, comme rien ne nous oblige à des restrictions qui ont sans doute pour cause la brièveté du temps accordé

(*) Ce problème a été aussi résolu par M. Moncourt (Eugène), élève de l'École Normale.

aux candidats, nous substituerons à l'énoncé précédent celui qui suit :

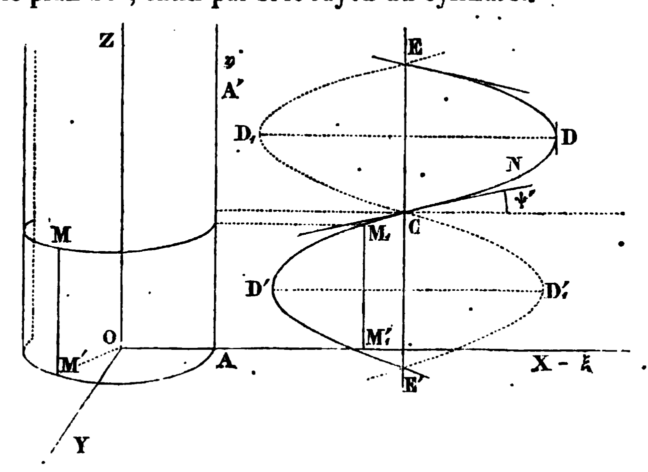
Déterminer les transformées planes des courbes tracées sur un cylindre de révolution, dont le rayon de courbure est constant.

a représentant le rayon constant, les coordonnées rectangulaires des points de ces courbes doivent, d'après une formule connue, satisfaire à l'équation différentielle

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 \\ + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = \dfrac{ds^6}{a^2}, \end{array} \right.$$

dans laquelle la variable indépendante est quelconque.

L'axe du cylindre étant pris pour axe des z, supposons qu'on développe sa surface sur le plan $\widehat{zx}$, à partir de la génératrice AA', et soit M_1 la position que prend le point $M(x, y, z)$ qui se projetait en M' sur $\widehat{xy}$. Désignons par φ l'angle M'OX, par ξ, η les coordonnées de M_1 relativement à AX et AA', prises pour axes de coordonnées dans le plan $\widehat{zx}$, enfin par R le rayon du cylindre.



On peut regarder l'arc $R\varphi = \xi$ comme la variable indépendante de l'équation (1), et, à ce point de vue, de

$$x = R\cos\varphi,\quad y = R\sin\varphi,$$

on tire

$$dx = -\sin\varphi . d\xi,\qquad dy = \cos\varphi . d\xi,$$

$$d^2x = -\frac{\cos\varphi}{R} . d\xi^2,\qquad d^2y = -\frac{\sin\varphi}{R} . d\xi^2.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$dz = d\eta,\quad d^2z = d^2\eta \quad \text{et} \quad ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

D'après ces formules, l'équation (1) donne

$$(2)\quad (d\xi^2 + d\eta^2)\, d\xi^4 + R^2 (d^2\eta)^2 d\xi^2 = \frac{R^2}{a^2}(d\xi^2 + d\eta^2)^3,$$

qui représente les transformées planes, et de laquelle on déduit

$$(3)\qquad \left(\frac{d\eta'}{d\xi}\right)^2 = (1 + \eta'^2)\left[\frac{(1 + \eta'^2)^2}{a^2} - \frac{1}{R^2}\right],$$

en posant

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'.$$

Les deux valeurs de $\frac{d\eta'}{d\xi}$, données en général par cette équation, deviennent égales et en même temps nulles, pour celles de η' qui sont déterminées par

$$(4)\qquad (1 + \eta'^2)^2 - \frac{a^2}{R^2} = 0;$$

et comme ces dernières valeurs, savoir,

$$\eta' = \pm\sqrt{\pm\frac{a}{R} - 1},$$

sont constantes, de telle sorte qu'on en tire

$$\frac{d\eta'}{d\xi} = 0,$$

l'équation (4) est une intégrale singulière de l'équation (3), pourvu qu'elle ne rentre pas dans l'intégrale générale.

Quoi qu'il en soit, l'intégrale générale de l'équation (4), qui est

$$\eta = \pm \xi \sqrt{\pm \frac{a}{R} - 1} + \text{const.},$$

satisfait à l'équation (3), et elle donne, en prenant $+$ devant $\frac{a}{R}$:

1°. Si $a > R$, deux droites correspondantes aux hélices coupant les génératrices du cylindre sous l'angle dont le cosinus est $\sqrt{\frac{a-R}{a}}$, et dont deux se croisent en chaque point de sa surface;

2°. Si $a = R$, une parallèle à $A\xi$ correspondante aux sections circulaires auxquelles les hélices se réduisent quand l'angle atteint 90 degrés;

3°. Si a est infini, une perpendiculaire à $A\xi$ correspondante aux sections rectilignes sur lesquelles on doit tomber quand l'angle est nul.

L'équation (3) étant du premier ordre, on peut immédiatement prendre η' pour variable indépendante. Si l'on pose

$$\eta' = \operatorname{tang} \psi,$$

de sorte que ψ désigne l'angle qu'une parallèle menée de l'origine A, à une partie déterminée de la tangente en chaque point (ξ, η) de la courbe, fait avec $A\xi$, on trouve facilement

$$(5) \qquad d\xi = \pm \frac{a \cos \psi . d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cdot \cos^4 \psi}},$$

à quoi il faut joindre

(6) $$d\eta = \pm \frac{a \sin\psi . d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cdot \cos^2\psi}},$$

en prenant ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs.

Quelle que soit la valeur du rapport $\frac{a}{R}$, η ne peut s'exprimer sous forme finie, en fonction de ψ, que par une intégrale définie ou par les notations des fonctions elliptiques; si $\frac{a}{R} \gtrless 1$, il en est de même de ξ; et seulement lorsque $a = R$, ξ s'exprime par un logarithme.

1°. Soit $a > R$. ψ' étant le plus petit arc positif dont le cosinus soit $\sqrt{\frac{R}{a}}$, $\frac{d\xi}{d\psi}$ et $\frac{d\eta}{d\psi}$ sont imaginaires pour les valeurs de ψ de o à ψ', réels pour les valeurs de ψ' à $\pi - \psi'$, puis redeviennent imaginaires quand ψ dépasse cette dernière valeur à laquelle on peut s'arrêter.

En posant, pour abréger,

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^2\psi} = \Psi,$$

on a

(7) $$\xi = c \pm a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos\psi}{\Psi} d\psi,$$

et

(8) $$\eta = c' \pm a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\sin\psi}{\Psi} d\psi,$$

c et c' désignant deux constantes arbitraires, qui sont les valeurs de ξ et η pour $\psi = \psi'$.

Si l'on considère premièrement le signe + devant les

intégrales définies; lorsqu'on fait croître ψ de ψ' à $\frac{\pi}{2}$, ξ et η croissent depuis les valeurs c et c' [C] jusqu'à de certaines valeurs d et d' [D]; et lorsque ψ croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi - \psi'$, ξ décroît de d à c, tandis que η continue de croître jusqu'à $c' + 2(d' - c') = 2d' - c'$ [E]. En effet, on a, d'une part,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\psi'} \frac{\cos\psi . d\psi}{\Psi} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi'} \frac{\cos\psi . d\psi}{\Psi} = -\int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi . d\psi}{\Psi},$$

d'où

$$\int_{\psi'}^{\pi-\psi'} \frac{\cos\psi . d\psi}{\Psi} = 0;$$

et, d'autre part,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\psi'} \frac{\sin\psi . d\psi}{\Psi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi'} \frac{\sin\psi . d\psi}{\Psi} = \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi . d\psi}{\Psi},$$

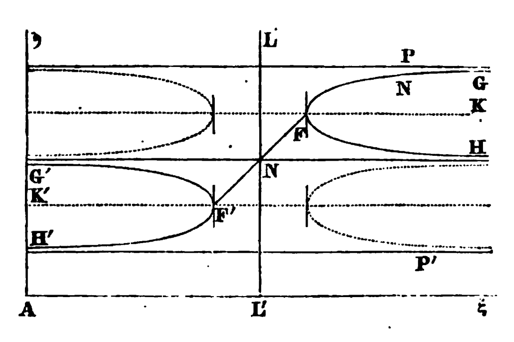
d'où

$$\int_{\psi'}^{\pi-\psi'} \frac{\sin\psi . d\psi}{\Psi} = 2\int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi . d\psi}{\Psi}.$$

La courbe a donc un arc qui va de C à E, à droite de CE parallèle à $A\eta$. Cet arc tourne sa concavité vers la corde CE, et ses deux parties CD, DE sont égales, car l'inclinaison de la tangente sur la corde CE est égale à $\frac{\pi}{2} - \psi'$ au point C, diminue jusqu'en D, où elle devient nulle, puis reprend de D à E, dans un ordre inverse, les mêmes valeurs que C à D. Si l'on passe du signe $+$ au signe $-$ devant les intégrales définies des équations (7) et (8),

pour une même valeur de ψ, $\xi - c$ et $\eta - c'$ changent seulement de signes; la courbe a donc un autre arc CD'E' qui, en tournant de 180 degrés dans le plan autour du point C, irait coïncider avec CDE, et le point C est à la fois un centre et un point d'inflexion.

2°. Soit $a < R$. $\frac{d\xi}{d\psi}$ et $\frac{d\eta}{d\psi}$ ne deviennent imaginaires pour aucune valeur de ψ, et il convient de remplacer, dans les équations (7) et (8), la limite ψ' des intégrales définies par zéro. En prenant successivement les signes + et —, les valeurs de ψ, depuis zéro jusqu'à π, donnent un arc pareil à EDCD'E', mais les tangentes aux points extrêmes sont parallèles à $A\xi$. Les valeurs depuis π jusqu'à 2π donnent un arc égal à celui-là, avec lequel il irait coïncider par une demi-révolution autour de la perpendiculaire à $A\xi$, passant par les points de raccord; et cette droite, ainsi que la parallèle menée à $A\xi$ par le point de croisement des deux arcs, est un axe de symétrie. Enfin, les valeurs de ψ, supérieures à 2π, ne donneraient rien de plus que celles de zéro à 2π, car les intégrales définies $\int_0^\psi \frac{\cos\psi . d\psi}{\Psi}$ et $\int_0^\psi \frac{\sin\psi . d\psi}{\Psi}$, sont évidemment des fonctions de ψ, dont les valeurs ne changent pas lorsqu'on augmente ψ de 2π.



3°. Soit $a = R$. On a, d'après les équations (5) et (6),

$$\xi = c \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \log\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sin^2\psi}}{\sin\psi}\right),$$

et

$$\eta = c' \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}} = c' \pm \frac{R}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \psi\right).$$

ψ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$:

$$\xi \text{ varie de } \pm\infty \text{ à } c \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{1} - 1);$$

et ψ continuant de croître jusqu'à π, ξ reprend les mêmes valeurs dans l'ordre inverse. η, au contraire, varie toujours dans le même sens depuis c' jusqu'à $c' \pm R\sqrt{2}.F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ [notations de Legendre]. D'après cela, en prenant les signes $+$, on a la branche GFH; et, en prenant les signes $-$, la branche G'F'H'. De plus, les droites FK, F'K', représentées par les équations $\eta = c' \pm \frac{R}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sont des axes de symétrie des deux branches concaves, l'une et l'autre, vers ces droites; les droites N, P et P', représentées par $\eta = c'$ et $\eta = c' \pm R\sqrt{2}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sont des asymptotes; et le point N (c, c'), où FF' coupe la droite N, est un centre.

Si l'on donne à ψ des valeurs comprises entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$ [k étant un nombre entier quelconque], ξ et η sont réels; et $\psi_{,}$ étant un arc compris entre zéro et π, ξ a des valeurs égales pour $\psi = \psi_{,}$ et $\psi = 2k\pi + \psi_{,}$, tandis que les valeurs correspondantes de η diffèrent de $4k.\frac{R}{\sqrt{2}}.F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. On a donc, pour ces valeurs de ψ, une

couple de branches, avec lesquelles celles qu'on a d'abord trouvées iraient coïncider, si on les faisait glisser dans le plan, parallèlement à $A\eta$, de manière que les coordonnées η s'accrussent toutes de $4k.\frac{R}{\sqrt{2}}.F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Les courbes que nous venons d'obtenir par la discussion sommaire des trois cas que présentent les deux paramètres a et R, ne cessent pas, en raison de ce que le cylindre est de révolution, d'être des transformées de courbes situées sur le cylindre, et ayant le rayon de courbure constant a, lorsqu'on les fait glisser sur le plan $\widehat{zx}$, de manière que tous leurs points décrivent en même temps des droites parallèles et égales. D'après cela, on peut joindre à l'arc EDD'E', trouvé dans le cas de $a > R$, l'arc $ED'D'_{,}E'$, symétrique par rapport à EE'; et aux branches infinies GH, G'H', trouvées dans le cas de $a = R$, les branches symétriques par rapport à la perpendiculaire LL' menée de N à $A\xi$. On peut aussi *raccorder* les arcs, ou les branches infinies, par les points où les tangentes sont parallèles entre elles, de telle sorte qu'elles viennent se confondre par le *raccord*. Toutes les combinaisons que l'on imaginera donneront toujours des courbes qui satisferont aux équations différentielles (3), (5) et (6), et l'on pourra les déduire des équations (7) et (8), et de celles qui se rapportent au cas de $a = R$, en changeant les constantes arbitraires, les limites des intégrales, ou la manière de prendre les signes doubles.

En résumé, par chaque point M d'un cylindre de révolution de rayon R :

1°. Si $a > R$, il y a deux courbes symétriques par rapport au plan du point M et de l'axe du cylindre, qui jouissent (outre les deux hélices) de la propriété d'avoir le rayon de courbure constant a, pour toute valeur de

dépassant pas $\frac{\pi}{2} - \psi'$ de l'angle sous lequel la courbe devra couper en M la génératrice;

2°. Si $a \overline{\gtrless} R$, ces deux courbes existent pour toutes les valeurs de cet angle, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; et la section droite du cylindre s'y joint, à cette dernière limite, quand $a = R$ (il n'y a pas d'hélice).

Rectification. — Les équations (5) et (6) donnent

$$ds = \frac{a d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^4 \psi}};$$

donc, lorsque $a \gtrless R$, l'arc s ne peut, de même que ξ et η, s'exprimer en fonction de ψ que par une intégrale définie ou par les notations des fonctions elliptiques. Mais, quand $a = R$, on a

$$ds = \frac{R d\psi}{\sin \psi \sqrt{1 + \cos^2 \psi}},$$

et il vient, en intégrant,

$$s = \frac{R}{\sqrt{2}} . \log \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \psi} - \sqrt{2} . \cos \psi}{\sin \psi} \right),$$

si l'on prend pour l'origine de l'arc s l'un des points où la tangente est perpendiculaire à $A\xi$.

Aire. — Soit d'abord $a \gtrless R$. Si l'on désigne par $\xi_,$, $\eta_,$ les coordonnées d'un point N de l'arc CDE, par rapport aux parallèles menées de C à $A\xi$, $A\eta$, et par A le segment compris entre l'arc CN, une partie correspondante de CE et la parallèle menée de N à $A\xi$; on a

$$dA = \xi_, d\eta_, \quad \xi_, = a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi d\psi}{\Psi}, \quad d\eta_, = a . \frac{\sin \psi d\psi}{\Psi},$$

en convenant de donner à ψ', lorsque $a > R$, la valeur précédemment indiquée, et de faire $\psi' = 0$ lorsque $a < R$; donc

$$dA = a^2 \frac{\sin \psi \, d\psi}{\Psi} \cdot \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi \, d\psi}{\Psi},$$

et, par suite,

$$A_{,} = 2a^2 \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \psi}{\Psi} \cdot \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos \psi \, d\psi}{\Psi} \right) d\psi,$$

en représentant par $A_{,}$ l'aire du segment CDE.

Lorsque $a = R$, l'ordonnée, et, par conséquent, l'aire, peuvent s'obtenir en fonction de l'abscisse par une simple quadrature. En effet, l'équation entre ξ et ψ, relative à ce cas, donne

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sin^2 \psi}}{\sin \psi} = e^{\pm \alpha \xi_{,}},$$

en mettant α au lieu de $\frac{\sqrt{2}}{R}$, afin d'abréger; par conséquent, on a

$$\sin \psi = \frac{2\sqrt{2}}{e^{\alpha \xi_{,}} + e^{-\alpha \xi_{,}}},$$

puis

$$\tan \psi = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(e^{\alpha \xi_{,}} + e^{-\alpha \xi_{,}})^2 - 8}},$$

et, comme $\tan \psi = \frac{d\eta_{,}}{d\xi_{,}}$, il vient

$$\eta_{,} = C \pm 2\sqrt{2} \int_{\xi_0}^{\xi_{,}} \frac{d\xi_{,}}{\sqrt{(e^{\alpha \xi_{,}} + e^{-\alpha \xi_{,}})^2 - 8}} \; (*),$$

ξ_0 étant une des deux valeurs de $\xi_{,}$ entre lesquelles il faut

---

(*) C'est par la discussion de cette équation que l'on demandait de reconnaître la forme de la courbe, dans le cas de $a = R$: on trouvera, sans difficulté, la forme représentée par la *fig.* 2.

que cette variable ne tombe pas pour que $\eta_{,}$ soit réelle [ces valeurs, déjà trouvées plus haut, sont $\pm\frac{1}{\alpha}\log(\sqrt{2}-1)$, on les obtient ici en résolvant l'équation $e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}}=2\sqrt{2}$].

Enfin, B désignant le segment compris entre un arc FN, les parallèles menées à Aξ par ses extrémités et la droite LL', on a

$$B = 2\sqrt{2}\int_{\xi_0}^{\xi_{,}} \frac{\xi_{,}\,d\xi_{,}}{\sqrt{(e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}})^2-8}}.$$

Rayon de courbure. — ρ désignant le rayon de courbure, on a, d'après les équations (5) et (6),

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}\cos^4\psi}} = \frac{a}{\Psi},$$

en appliquant la formule

$$\rho = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Si $a > R$, ρ est infini pour $\psi = \psi'$ [C]; si $a < R$, $\rho = \frac{aR}{\sqrt{R^2-a^2}}$ pour $\psi = 0$ [C]; et, dans ces deux cas, $\rho = a$ pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ [D].

Lorsque $a = R$, on a

$$\rho = \pm\frac{R}{\sin\psi.\sqrt{2-\sin^2\psi}};$$

ρ est infini pour $\psi = 0$, et $\rho = R$ pour $\psi = \frac{\pi}{2}$ [F]. Enfin, on a, dans ce cas,

$$\rho = \frac{R}{2}\,\frac{(e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}})^2}{e^{\alpha\xi_{,}}-e^{-\alpha\xi_{,}}},$$

en remplaçant $\sin\psi$ par sa valeur $\frac{2\sqrt{2}}{e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}}}$.

QUESTIONS.

249. Un nombre pair donné étant décomposé, autant de fois que faire se peut, en deux facteurs, l'un impair (l'unité comprise) et l'autre pair; la somme des facteurs pairs, moins la somme des facteurs impairs correspondants, est égale à la somme de tous les diviseurs de la moitié du nombre donné. (Jacobi.)

250. Quatre points étant donnés sur une droite, prenant ces points deux à deux, on obtient trois systèmes de deux couples chacun, et à chacun de ces systèmes correspond sur la droite un couple de points simultanément harmoniques aux deux couples du système; les trois couples ainsi déterminés, pris deux à deux, sont harmoniques entre eux.

Cette propriété donne la résolution des équations biquadratiques. (Otto Hesse.)

NOTE SUR L'INTÉGRATION DE LA DIFFÉRENTIELLE

$$d\lambda = \frac{-dl(C - D\cos l)}{\sin l\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos^2 l}}$$

du § 723, page 292 de l'ouvrage d'Euler : *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ;*

Par M J.-DOSTOR,

Docteur ès sciences mathématiques.

Pour intégrer cette différentielle, nous ferons remarquer que l'expression sous le radical revient à

$$1 - C^2(\sin^2 l + \cos^2 l) + 2CD\cos l - (1 + D^2)(1 - \sin^2 l),$$

qui peut s'écrire

$$\sin^2 l\,(1 - C^2 + D^2) - (D - C\cos l)^2;$$

de sorte que

$$d\lambda = \frac{-dl\,(C - D\cos l)}{\sin l\,\sqrt{\sin^2 l\,(1 - C^2 + D^2) - (D - C\cos l)^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{-dl\,(C - D\cos l)}{\sin^2 l.\,H}}{\sqrt{1 - \dfrac{(D - C\cos l)^2}{\sin^2 l.\,H^2}}},$$

où

$$H = \sqrt{1 - C^2 + D^2}.$$

Posons

$$x = \frac{D - C\cos l}{\sin l.\,H};$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{C\sin^2 l\,dl - (D - C\cos l)\cos l\,dl}{\sin^2 l.\,H} = \frac{(C - D\cos l)\,dl}{\sin^2 l.\,H},$$

et nous aurons

$$d\lambda = \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

d'où

$$\lambda = E + \text{arc}\,(\cos = x) = E + \text{arc}\left(\cos = \frac{C - D\cos l}{\sin l.\sqrt{1 - C^2 + D^2}}\right).$$

Cette intégrale est différente de

$$\lambda = E + \text{arc}\left(\sin = \frac{-D + C\cos l}{\sin l}\right),$$

donnée par Euler, que M. le D[r] J.-P. Wolfers, de Berlin, a déjà rectifiée (*Archiv. der Mathematik*, 1850, p. 111), et à laquelle il a substitué la suivante :

$$\lambda = E + \text{arc}\left[\text{tang} = \frac{\sqrt{1 - C^2 + 2CD\cos l - (1 + D^2)\cos^2 l}}{D - C\cos l}\right],$$

qu'il a obtenue par une méthode plus laborieuse que celle que nous venons de suivre.

OBSERVATIONS DIVERSES SUR CERTAINS ARTICLES DES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Dérivées de la fonction arc cot x (*voir* t. IX, p. 36).

Euler a exposé ces formules et de nombreuses conséquences qui en découlent dans son Calcul différentiel, *pars posterior*, §§ 91, 92, 93.

Forme quadratique $x^2 - ay^2$ (*voir* t. IX, 305).

Je trouve ce qui suit dans un Mémoire de Lagrange, du 20 septembre 1768 (*Mélanges de Turin*, tome IV, page 93) :

« En général, si R est exprimé par $A^m B^n C^r D^s \ldots$, A, B, C, D, etc., étant des nombres de la forme de $P^2 - aQ^2$, mais qui ne soient qu'une seule fois de cette forme; le nombre R sera (comme je l'ai démontré ailleurs) de la même forme autant de fois, ni plus ni moins, qu'il y a d'unités dans la moitié de ce nombre

$$(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)\ldots,$$

s'il est pair, ou dans la moitié de ce même nombre augmenté de l'unité, s'il est impair. »

Je ne connais pas le précédent travail de Lagrange, auquel il fait allusion ici, mais je vois que la même proposition est démontrée dans la *Théorie des nombres*, de Legendre, première édition, n° 236.

Cette formule comprend celles de M. Volpicelli et de M. Gauss. On doit seulement remarquer qu'elle ne servira point, pour toutes les valeurs de a, à trouver le nombre de solutions de l'équation

$$x^2 - ay^2 = n;$$

car il peut arriver que n soit de la forme $x^2 - ay^2$, et qu'aucun de ses diviseurs ne comporte la même forme. Il faudra, de plus, que le nombre a soit négatif, sans quoi il y aurait une infinité de solutions.

Théorème sur les transversales (*voir* t. X, p. 102).

Ce théorème, qu'on attribue à Jean Bernoulli, est démontré dans un ouvrage de Jean Ceva, *De lineis rectis se invicem secantibus*, Milan, 1678. (*V.* Chasles, *Aperçu historique*, Note VII, p. 294-295.)

SOLUTION DE LA QUESTION 246

(voir t. X, p. 358);

PAR M. CASIMIR REY,

Élève en mathématiques supérieures au lycée Louis-le-Grand.

Résoudre l'équation

$$(1)\qquad u^6 - 6u^4 + au^3 + 9u^2 - 3au + f = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(u^6 - 6u^4 + 9u^2) + au^3 - 3au + f = 0,$$

ou

$$[u(u^2 - 3)]^2 + a[u(u^2 - 3)] + f = 0.$$

Posons

$$(2)\qquad u(u^2 - 3) = z,$$

l'équation proposée devient

$$z^2 + az + f = 0,$$

équation qui donne z par une équation quadratique, et ensuite on trouve u par une équation cubique.

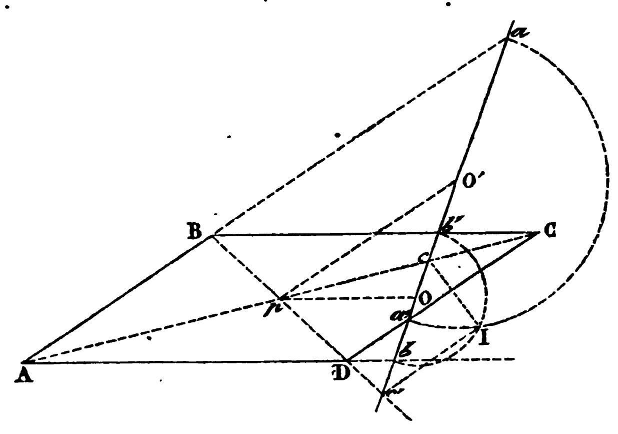
Note. Cette question est résolue de la même manière par M. E. Dewulf, admis à l'École Polytechnique.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DONNÉ AU CONCOURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES EN 1849

(voir t. VIII, p. 315, 369 et 401);

PAR M. A. NÉVROUZIAN (Arménien).

Étant donné un quadrilatère ABCD; *si une transversale rencontre les deux côtés opposés* AB, CD, *en deux points* a, a'; *les deux autres côtés* AD, BC, *en* b *et* b', *et les deux diagonales* AC, BD, *en* c *et* c'; *les circonférences de cercle décrites sur les trois segments* aa', bb', cc', *comme diamètres, se couperont, deux à deux, dans les mêmes points.*



Démonstration. Soit I un des points d'intersection des deux circonférences décrites sur les segments aa' et bb'; nous allons démontrer que l'angle $c\mathrm{I}c'$ est droit; d'où l'on conclura que la circonférence décrite sur cc', comme diamètre, passe par le point I.

Que, par le point d'intersection p des deux diagonales

on mène la droite pO parallèle aux côtés AD, BC, et la droite pO' parallèle aux deux côtés AB, DC.

Le triangle cAb, coupé par pO parallèle à la base Ab, donne

$$\frac{Ob}{Oc} = \frac{pA}{pc};$$

et le triangle cAa, coupé par pO', donne

$$\frac{pA}{pc} = \frac{O'a}{O'c}.$$

Donc

$$\frac{Ob}{Oc} = \frac{O'a}{Oc}, \quad \text{ou} \quad \frac{Oc}{O'c} = \frac{Ob}{O'a}.$$

Or O' est le milieu du segment aa', et l'on a

$$O'a = O'I,$$

et, pareillement,

$$Ob = OI;$$

donc

$$\frac{Oc}{O'c} = \frac{OI}{O'I}.$$

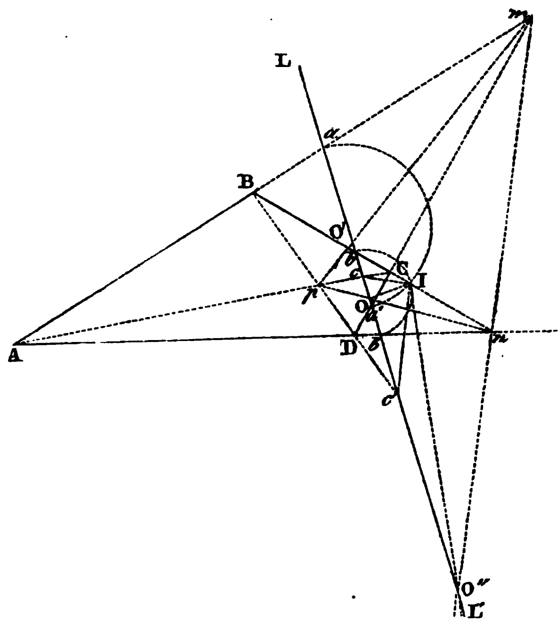
Cette équation prouve que la droite Ic est la bissectrice de l'angle OIO'.

Or, ce qui se trouve démontré à l'égard du point c appartenant à la diagonale AC, s'applique au point c' de l'autre diagonale BD, c'est-à-dire que la droite Ic' divise en deux également le supplément de l'angle OIO'. Donc les deux droites Ic, Ic' sont rectangulaires. Ce qu'il fallait démontrer. Donc, etc.

Généralisation du théorème. La démonstration précédente peut être appliquée, par une généralisation convenable, au cas d'un quadrilatère quelconque.

Soit I un des points d'intersection des circonférences

décrites sur les deux segments aa', bb', comme diamètres; je vais faire voir que l'angle cIc' est droit.



Soient m, n, p les points de rencontre des côtés opposés (AB, DC), (BC, AD) et des deux diagonales (AC, BD); et soient O, O′, O″ les points où les trois droites np, mp et mn rencontrent la transversale LL′.

Le segment aa' est divisé harmoniquement aux points O′, O″, parce que les quatre droites Am, pm, Dm et nm forment un faisceau harmonique. Il s'ensuit que l'on a, dans le cercle aIa',

$$\frac{O'I}{O''I}=\frac{O'a}{O''a}.$$

On a de même, à l'égard du segment bb',

$$\frac{O''I}{OI}=\frac{O''b}{Ob}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$(1) \qquad \frac{O'I}{OI} = \frac{O'a}{O''a} \cdot \frac{O''b}{Ob}.$$

Or on a

$$(2) \qquad \frac{O'a}{O''a} \cdot \frac{O''b}{Ob} \cdot \frac{Oc}{O'c} = 1;$$

car les trois triangles aAb, bAc et cAa, coupés respectivement par les transversales mn, np et pm, donnent lieu aux trois équations

$$\frac{ma}{mA} \cdot \frac{nA}{nb} \cdot \frac{O''b}{O''a} = 1,$$

$$\frac{mA}{ma} \cdot \frac{pc}{pA} \cdot \frac{O'a}{O'c} = 1,$$

$$\frac{nb}{nA} \cdot \frac{pA}{pc} \cdot \frac{Oc}{Ob} = 1,$$

qui, multipliées membre à membre, donnent cette équation (2).

De celle-ci et de l'équation (1), on conclut

$$\frac{O'I}{OI} = \frac{O'c}{Oc}.$$

Cette équation prouve que la droite Ic est la bissectrice de l'angle OIO'. Donc, puisque les deux points c, c' divisent harmoniquement le segment OO', la droite Ic' est la bissectrice du supplément de l'angle OIO'; donc les deux droites Ic, Ic' sont rectangulaires, et, par conséquent, le point I est sur la circonférence décrite sur $c'c$ comme diamètre. C. Q. F. P.

DIVISION ORDONNÉE DE FOURIER;

Par M. VERNIER,
Professeur de Mathématiques supérieures au lycée Napoléon.

1. Soit proposé de diviser le nombre entier

3456789123456789

par 87654321. (Exemple 1, page 59.)

En séparant sur la gauche du dividende un nombre capable de contenir le diviseur, on voit que le quotient aura huit chiffres à la partie entière.

Nous appellerons *diviseur désigné* le nombre entier formé par quelques-uns des premiers chiffres placés à gauche dans le diviseur. Nous appellerons aussi *ordre* d'un chiffre ou d'un nombre de plusieurs chiffres, le degré de la puissance de 10 que chaque unité de ce chiffre ou de ce nombre représente.

Ainsi, dans l'exemple 1, comme le quotient aura huit chiffres, nous dirons que son premier chiffre est d'ordre 7, son second d'ordre 6, etc. Si, de plus, dans le diviseur 87654321, nous prenons pour diviseur désigné le nombre 876 formé par les trois premiers chiffres placés à gauche, nous dirons que le diviseur désigné est d'ordre 5, et nous regarderons le diviseur total $\overline{876}54321$ comme composé de six parties d'ordre décroissant, depuis le cinquième ordre jusqu'à l'ordre 0, qui est celui des unités simples, à savoir : de 876 unités du cinquième ordre, de 5 unités du quatrième, de 4 du troisième, de 3 du deuxième, de 2 du premier, et de 1 unité simple ou d'ordre 0.

2. Nous envisagerons le dividende comme la somme de tous les produits deux à deux des parties d'ordres différents dont se compose le diviseur, par chacun des chiffres du quotient; et, puisque le quotient aura huit chiffres, dont le premier sera d'ordre 7, et que le diviseur est regardé comme la somme de six parties d'ordre décroissant à partir du cinquième ordre, le dividende est la somme de quarante-huit produits deux à deux d'ordre décroissant depuis 12 jusqu'à 0.

3. La méthode de Fourier consiste à déduire successivement tous les chiffres du quotient, en commençant par ceux de l'ordre le plus élevé, d'une série de dividendes partiels, dont voici la composition : Le premier contient le plus élevé des quarante-huit produits partiels énumérés au n° 2, c'est-à-dire le produit d'ordre 12 venant de la multiplication du diviseur désigné $\overline{876}$, d'ordre 5, par le premier chiffre du quotient, qui est d'ordre 7. Ce premier dividende partiel, d'ordre 12, renfermera, en outre, les unités d'ordre 12 résultant de l'addition des quarante-sept produits restants, dont l'ordre est inférieur à 12.

Le second dividende sera dit dividende partiel d'ordre 11, parce qu'il contiendra le produit d'ordre 11 du diviseur désigné $\overline{876}$, d'ordre 5, par le second chiffre du quotient, qui est d'ordre 6; et il renfermera, en outre, les unités d'ordre 11 résultant de l'addition de ceux des quarante-huit produits partiels désignés au n° 2, dont l'ordre sera moindre que 11.

Le troisième dividende partiel sera d'ordre 10; il contiendra le produit d'ordre 10 du diviseur désigné $\overline{876}$, par le troisième chiffre du quotient, qui est d'ordre 5, et il renfermera, en outre, les unités d'ordre 10 résultant de l'addition de ceux des quarante-huit produits composant

le dividende total, qui seront d'un ordre inférieur à 10.

Le quatrième dividende partiel, d'ordre 9, se composera pareillement avec le quatrième chiffre du quotient, le cinquième avec le cinquième chiffre du quotient, et ainsi de suite.

4. Il nous reste à expliquer comment on obtient chacun de ces dividendes partiels successifs, et comment on déduit de chacun d'eux un chiffre du quotient.

On obtient le premier dividende partiel d'ordre 12, en séparant douze chiffres sur la gauche du dividende, ce qui donne le nombre 3456. Puisque ces 3456 unités d'ordre 12 contiennent le produit du diviseur désigné $\overline{876}$ (*voyez* n° 3) par le premier chiffre du quotient, on aura ce premier chiffre ou un chiffre trop fort, en divisant 3456 par 876. Cette division donne 3 pour quotient et 828 pour reste. Or, de ce que le reste 828 surpasse le premier chiffre 3 du quotient, on conclut que le chiffre 3 n'est pas trop fort. En effet, si nous supposons que le quotient ne renferme que ces trois unités d'ordre 7, et soit 30 000 000, et si nous multiplions par ce quotient le diviseur total $\overline{876}54321$, le produit se composera de trois fois 876 unités d'ordre 12, plus du produit de 54321 par 3, lequel sera moindre que trois fois une unité d'ordre 12, tandis que le dividende contient trois fois 876 unités d'ordre 12, plus 828 unités d'ordre 12.

A la droite du reste 828 j'abaisse le chiffre 7, d'ordre 11, au dividende; ce qui donne 8287 unités d'ordre 11.

Ce nombre n'est pas encore le deuxième dividende partiel d'ordre 11, dont nous avons indiqué la composition au n° 3. Comme ce dernier ne doit contenir d'autre produit d'ordre 11 que celui du diviseur désigné par le second chiffre du quotient, je diminue 8287 de 15 unités d'ordre 11, venant de la multiplication des 3 unités

d'ordre 7 placées au quotient, par les 5 unités d'ordre 4 du diviseur $\overline{876}54321$, et c'est le reste 8272 qui est le deuxième dividende partiel d'ordre 11.

En le divisant par 876, on aura le second chiffre du quotient ou un chiffre trop fort. Cette division donne 9 pour quotient et 388 pour reste. Or, de ce que ce reste 388 surpasse la somme des deux premiers chiffres 3 et 9, posés au quotient, on conclut que le chiffre 9 n'est pas trop fort; car, si nous supposons que le quotient ne renferme que ces 9 unités d'ordre 6, et soit 39 000 000, et si nous multiplions par ce quotient le diviseur total $\overline{876}54321$, en réduisant cette multiplication à la formation du produit d'ordre 11 du diviseur désigné, par 9, et des produits d'ordre inférieur à 11 (*voyez* n° 2), nous trouverons seulement neuf fois 876 unités d'ordre 11, plus un nombre moindre que 9 unités d'ordre 11, venant de la multiplication de 54321 par 9, plus encore un nombre moindre que 3 unités d'ordre 11, venant de la multiplication de 4321 par 3, tandis que le deuxième dividende partiel 8272 d'ordre 11 contient neuf fois 876, plus 388 unités d'ordre 11.

A la droite du reste 388, j'abaisse le chiffre 8 d'ordre 10 au dividende. Le nombre 3888 ainsi formé n'est pas encore le troisième dividende partiel d'ordre 10, indiqué au n° 3. Comme ce dernier ne doit contenir d'autre produit d'ordre 10 que celui du diviseur désigné par le troisième chiffre du quotient, je diminue 3888 de $9 \times 5 + 3 \times 4$ ou de 57 unités d'ordre 10, venant de la multiplication des 5 unités d'ordre 4 du diviseur $\overline{876}54321$, par les 9 unités d'ordre 6 du quotient, et de celle des 4 unités d'ordre 3 du diviseur par les 3 unités d'ordre 7 du quotient, et le reste 3831 de cette soustraction sera le troisième dividende partiel d'ordre 10.

5. Sans aller plus loin, on voit que la division par le diviseur désigné, de chacun des dividendes partiels successifs, fournira un chiffre *exact* du quotient, toutes les fois que, multipliant le diviseur désigné par ce chiffre et retranchant le produit du dividende partiel, on aura un reste plus grand que la somme des chiffres posés au quotient ou égal à cette somme, dans laquelle il faut comprendre le chiffre qui a fourni ce reste.

On voit maintenant pourquoi nous avons pris un diviseur désigné 876 de trois chiffres, au lieu de prendre simplement les deux premiers chiffres du diviseur 87654321, ou même seulement le premier; c'était afin qu'en divisant chaque dividende partiel par le diviseur désigné, nous eussions une plus forte chance d'obtenir un reste plus grand que la somme des chiffres du quotient.

6. Quant à la manière de former les dividendes partiels successifs, on voit aussi qu'en général, quand un dividende partiel a fourni un chiffre exact du quotient, et quand on a retranché de ce dividende partiel le produit du diviseur désigné par ce chiffre exact, il faut abaisser à la suite du reste un chiffre suivant du dividende, et retrancher du nombre ainsi formé tous les produits qu'on obtient en multipliant le dernier chiffre du quotient, l'avant-dernier, etc., en allant de droite à gauche, respectivement par le premier des chiffres qui viennent dans le diviseur total à la droite du diviseur désigné, par le deuxième, par le troisième, par le quatrième, etc.

Ce qui revient à ce paragraphe de la règle énoncée par Fourier : « Pour trouver la correction qu'on doit faire » à un dividende partiel, c'est-à-dire la quantité qu'on » en doit retrancher, on écrit sur une feuille séparée et » dans l'ordre inverse, les *m* chiffres trouvés au quotient, » on les présente aux *m* chiffres pris à la suite du diviseur désigné, en sorte qu'ils se correspondent chacun

» à chacun, puis on multiplie chaque chiffre par celui » qui est placé au-dessous de lui, et, en ajoutant les m » produits, on connaît ce qui doit être retranché du di- » vidende partiel. » (*Analyse des Équations déterminées*, page 188; 1831.)

7. Quand on a retranché d'un dividende partiel le produit d'un diviseur désigné par un chiffre posé au quotient, et quand le reste ne dépasse pas ou n'égale pas la somme des chiffres déjà posés au quotient, on n'est plus sûr que le dernier chiffre posé soit exact (*voyez* n° 5). On ne sera sûr qu'il est trop fort, que si les corrections indiquées au n° 6, pour obtenir le dividende partiel suivant, ne peut pas s'effectuer; alors on diminuera le chiffre posé (*voyez* l'exemple 2, page 60).

8. Mais si cette correction peut être faite, on ne sait pas encore si le chiffre posé est trop fort ou exact. Alors, dit Fourier, « on abaissera un nouveau chiffre du divi- » dende à la droite du dividende partiel qui a donné ce » chiffre incertain; en même temps on marquera un » chiffre de plus à la suite du diviseur désigné, ce qui » donnera un nouveau dividende partiel et un nouveau » diviseur désigné. On procédera suivant la règle énoncée » à la correction du nouveau dividende partiel, c'est-à- » dire que l'on comparera les n chiffres écrits au quotient » à un pareil nombre n de chiffres pris à la suite du nou- » veau diviseur désigné; ayant formé, par cette correc- » tion, le nouveau dividende partiel corrigé, on conti- » nuera l'application de la présente règle. » (*Analyse des Équations déterminées*, page 189.)

PREMIER EXEMPLE.

3456, premier dividende partiel d'ordre 12......	345678912345678 9		$\overline{87}6.54321$
	8287		$3_7\ 9_8\ 4_5\ 3_1 \ldots$
	15	$= 3.5$	
8272, deuxième dividende partiel d'ordre 11....	8272		
	3888		
	57	$= 3.4 + 9.5$	
3831, troisième dividende partiel d'ordre 10.....	3831		
	3279		
	65	$= 3.3 + 9.4 + 4.5$	
3214, quatrième dividende partiel d'ordre 9......	3214		
	5861		
	64	$= 3.5 + 4.4 + 3.9 + 2.3$	
5797, cinquième dividende partiel d'ordre 8.....	5797		

SECOND EXEMPLE.

Soit à diviser le nombre entier 345789123 par 1234567.

3455789123		$\overline{123}4567$
995		28.....
8	$= 2.4$	7
987		
37		
42	$= 2.5 + 4.8$	
987		
1267		
38	$= 2.5 + 4.7$	
1229		

Le premier dividende partiel 345 d'ordre 7, correspondant au diviseur désigné 123 d'ordre 3, a donné le premier chiffre 2 du quotient, et le second dividende partiel d'ordre 6 est 987. Divisant 987 par 123, on trouve que le chiffre 8, fourni par cette division, est incertain, et, comme la correction qui doit donner le troisième dividende partiel d'ordre 5 ne peut pas se faire, on reconnaît que 8 est trop fort. On essaye 7, qui est exact et qui conduit au troisième dividende 1229 partiel d'ordre 5, etc.

NOTE SUR UNE LIMITE DES RACINES DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. VANNSON,
Professeur à Versailles.

Quand on applique le calcul des différences à une équation du troisième degré, et qu'un nombre a rend positif le premier membre de l'équation, ainsi que les

différences première et seconde correspondantes, ce nombre a est limite supérieure des racines. En effet, soient $a - h$ et $a - 2h$ les nombres précédemment substitués; on aura

$$\Delta_1 = f(a-h) - f(a-2h) = hf'a - \frac{3}{2}h^2f''a + 7h^3,$$

et

$$\Delta'_1 = f(a) - f(a-h) = hf'a - \frac{h^2}{2}f''a + h^3,$$

et, enfin,

$$\Delta_2 = \Delta'_1 - \Delta_1 = h^2f''a - 6h^3.$$

Or, par hypothèse, on a

$$\Delta_2 > 0;$$

donc on a aussi

$$f''a > 6h.$$

On accorde encore

$$hf'a - \frac{h^2}{2}f''a + h^3 > 0,$$

ou

$$f'a > \frac{h}{2}[f''(a) - 2h];$$

à fortiori, on a

$$f'a > 0.$$

On voit donc que ce nombre a rend positives la fonction donnée $f(a)$ et ses dérivées successives; donc ce nombre est limite supérieure des racines positives. La même remarque et la même démonstration s'appliquent au quatrième degré.

LIEU DES POINTS DE RENCONTRE DES TANGENTES COMMUNES A UNE ELLIPSE FIXE ET A UN CERCLE VARIABLE

(voir t. X, p. 408);

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. *Lemme.* (x, y), (x', y'), (ξ, η) étant les coordonnées respectives de trois points, si l'on a

$$\frac{x-\xi}{x'-\xi}=\frac{y-\eta}{y'-\eta},$$

les trois points sont en ligne droite.

2. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux. Transformons cette ellipse *homographiquement* (*Nouvelles Annales*, t. II, p. 416, et t. V, p. 497), au moyen des deux formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi+\frac{x'-\xi}{\lambda\left(\dfrac{x'}{p}+\dfrac{y'}{q}-1\right)+1},\\ y &= \eta+\frac{y'-\eta}{\lambda\left(\dfrac{x'}{p}+\dfrac{y'}{q}-1\right)+1}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où x', y' sont les nouvelles coordonnées; on suppose que les axes restent les mêmes: ξ, η, λ sont trois constantes arbitraires; p, q deux constantes données. Avant de faire les substitutions, il faut remarquer que:

1°. Les deux points correspondants (x, y), (x', y')

et le point (ξ, η) sont toujours en ligne droite, car

$$\frac{x-\xi}{x'-\xi} = \frac{y-\eta}{y'-\eta} \text{ (lemme)};$$

donc le point (ξ, η) est un *centre d'homologie* par rapport à l'ellipse donnée et sa transformée, et ce point est le point de rencontre des tangentes communes, réelles ou imaginaires.

2°. Toutes les transformées passent par les deux points d'intersection (réels ou imaginaires) de l'ellipse donnée avec la droite donnée

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0;$$

car, pour ces deux points, on a

$$x = x', \quad y = y'.$$

Substituant les valeurs de x, y dans l'équation (1), on trouve, pour équation de la conique transformée,

$$\mathrm{A}y'^2 + \mathrm{B}x'y' + \mathrm{C}x'^2 + \mathrm{D}y' + \mathrm{F}z' + \mathrm{F} = 0,$$

$$\mathrm{A} = \frac{\lambda^2}{q^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\eta}{b^2 q} + \frac{1}{b^2},$$

$$\mathrm{C} = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\xi}{a^2 p} + \frac{1}{a^2},$$

$$\mathrm{B} = \frac{2\lambda}{pq}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{p\xi}{a^2} + \frac{q\eta}{b^2}\right],$$

$$\mathrm{D} = -\frac{2\lambda}{q}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{q\eta}{b^2} + 1\right],$$

$$\mathrm{E} = -\frac{2\lambda}{p}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{p\xi}{a^2} + 1\right],$$

$$\mathrm{F} = -\lambda^2\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + 2\lambda - 1.$$

3. Si l'on veut que la transformée devienne un cercle, il faut écrire $\mathrm{A} = \mathrm{C}$ et $\mathrm{B} = 0$; éliminant λ entre ces

deux équations, on obtient, réductions faites,

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{q^2}{b^2}\right)} - \frac{\eta^2}{\left(\frac{p^2}{a^2}\right)} = \frac{(a^2 - b^2)}{\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)} \quad (*).$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème. *Étant donnés une ellipse et un cercle variable, ayant deux points fixes (réels ou imaginaires) en commun avec l'ellipse, le lieu du centre d'homologie est une hyperbole confocale.*

Observation. Si le rapport $\frac{p}{q}$ est constant, on a toujours la même hyperbole. Ainsi, le lieu géométrique est le même pour toutes les droites de même direction communes à l'ellipse et au cercle variable, résultat trouvé d'une autre manière (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 408).

Observation. Si la conique donnée est une hyperbole, le lieu géométrique devient une ellipse homofocale.

Lorsque la conique donnée est une parabole, l'analyse précédente est encore applicable, mais en partant de l'équation ordinaire de la parabole. On trouve alors que le lieu cherché est une parabole homofocale égale à la parabole donnée et tournée dans un sens opposé.

4. *Remarque.* La méthode dont j'ai fait usage ne donne pas tous les points de rencontre des tangentes indistinctement. En effet, elle suppose essentiellement que la courbe proposée et sa transformée sont l'une et l'autre dans le même angle ou dans les angles opposés des tangentes communes. Dans le cas de quatre tangentes réelles, il n'y a que deux points qui satisfassent à cette condition, et ce sont ces deux points qui appartiennent au lieu trouvé ci-dessus.

Les autres points d'intersection sont au nombre de

(*) Hyperbole homofocale à l'ellipse donnée.

quatre, et il est toujours possible d'exprimer, au moyen du paramètre auxiliaire λ, les coordonnées du lieu de chacun de ces points. Car, à chaque valeur de λ correspondent, sur l'hyperbole, deux points S', S'', dont on peut déterminer les coordonnées ξ', η', ξ'', η'', et si, de chacun de ces points, on mène des tangentes T'_1, T'_2, T''_1, T''_2 à l'ellipse, la combinaison des équations de ces tangentes, prises deux à deux, savoir: $T'_1 T''_1$, $T'_1 T''_2$, $T'_2 T''_1$, $T'_2 T''_2$, donnera les coordonnées des nouveaux points cherchés en fonction de λ.

Je terminerai par faire observer que la même méthode s'applique à des courbes d'un ordre quelconque.

Note. 1°. La méthode est d'une extrême fécondité; à toutes les relations qu'on peut établir entre λ, ζ, η, correspondent autant de théorèmes sur les centres de similitude. Par exemple, posons $D = E = 0$; nous obtiendrons ce théorème: *Étant données une conique fixe et une conique variable, ayant deux points (réels ou imaginaires) en commun avec la conique fixe, et ayant le même centre, le lieu des centres de similitude est un diamètre conjugué à la corde commune.*

2°. Soient $f = 0$, $F = 0$ les équations de deux coniques, exprimées en coordonnées x, y; et p, q, r trois fonctions entières linéaires en x', y'; faisons $x = \frac{p}{r}$, $y = \frac{q}{r}$, et substituons ces valeurs dans les équations données, nous obtiendrons deux nouvelles coniques $f_1 = 0$, $F_1 = 0$, exprimées en x', y' et renfermant neuf constantes arbitraires, mais qui se réduisent à huit rapports. Pour que les nouvelles coniques deviennent des cercles, il faut écrire quatre équations; mais trois de ces équations ne renfermant pas les variables x', y' qui entrent dans les fonctions p, q, r, il ne reste que cinq rapports qui se réduisent par changements à quatre; de sorte qu'on a quatre équations à quatre inconnues. On voit donc que, *généralement parlant,* on peut transformer deux coniques en deux cercles; c'est là un des beaux théorèmes de M. Poncelet. Les coefficients de x', y' dans p, q, r étant les seules quantités qui soient déterminées, la transformation peut se faire d'une infinité de manières.

3°. La belle analyse de M. Breton, qui résout si facilement un problème difficile, est une millième preuve que, pour l'algèbre comme pour tout autre instrument, l'exécution dépend de l'artiste, et lorsqu'un problème semble être inaccessible à l'analyse, il faut se rappeler ce mot d'Euler: *Non tam analysi quam analystæ imputandum est.*

Dans un autre travail, que nous donnerons bientôt, M. Breton démontre

que le théorème de géométrie est un corollaire du théorème suivant de M. Steiner : *Les sommets des cônes droits circonscrits à un ellipsoïde sont sur une hyperbole.*

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1849

(voir t. X, p. 261);

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

PREMIÈRE QUESTION. — *Étant données une surface, et par chaque point de cette surface une droite qui fait avec les axes rectangulaires des coordonnées, des angles dont les cosinus sont des fonctions continues des coordonnées de ce point, trouver la condition pour qu'il existe une surface normale à toutes ces droites.*

Si l'on prend sur chacune des droites, que nous désignerons par D, à partir du point M où elle perce la surface donnée S, et du même côté, une longueur $Mm = r$ qui soit une fonction continue quelconque des coordonnées x, y, z de M, le lieu géométrique des points m sera une surface S'. En effet, X, Y, Z désignant les cosinus donnés en fonction de x, y, z, et ξ, η, ζ les coordonnées de m, on a

$$(1) \qquad \xi - x = rX, \quad \eta - y = rY, \quad \zeta - z = rZ;$$

et, par l'élimination de x, y, z entre ces trois équations et celle de la surface S, on trouvera, généralement, une équation en ξ, η, ζ, qui représentera une surface.

Pour que cette surface S' soit normale aux droites D, il faut et il suffit que les valeurs de ξ, η, ζ, en x, y, z, déterminées par les équations (1) et par celle de la surface S, satisfassent à l'équation

$$(2) \qquad (\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta = 0.$$

Or les équations (1) donnent

$$r^2 - (\zeta - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\zeta - z)^2 = 0,$$

de laquelle on tire, en différentiant,

$$r\,dr - (\xi - x)(d\xi - dx) - (\eta - y)(d\eta - dy) \\ - (\zeta - z)(d\zeta - dz) = 0;$$

cette relation se réduit, d'après l'équation (2), à

$$r\,dr + (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0;$$

et l'on a, enfin,

$$(3) \qquad dr + X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

par la substitution de $rX, \ldots,$ à $\xi - x, \ldots,$ suppression faite du facteur commun r.

Donc, pour que la surface S′ soit normale aux droites D, il faut que r satisfasse à l'équation (3), eu égard à celle de la surface S; et l'on voit, sans difficulté, que cette condition est suffisante, en remontant de l'équation (3) à l'équation (2).

Cela étant posé, si nous considérons maintenant r comme une inconnue, la condition demandée consiste évidemment en ce qu'on puisse trouver une valeur de r qui satisfasse à l'équation (3), en tenant compte de celle de la surface S; et, par conséquent, c'est une condition d'intégrabilité.

Il peut se présenter deux circonstances différentes, que nous allons examiner successivement.

Lorsque l'équation de la surface est soluble par rapport à une des coordonnées, z par exemple, et que l'on en tire

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

p, q étant des fonctions de x, y; l'équation (3) se ramène à

$$dr + (X_{\prime} + pZ_{\prime})\,dx + (Y_{\prime} + qZ_{\prime})\,dy = 0,$$

$X_,$, $Y_,$, $Z_,$ étant ce que deviennent X, Y, Z par la substitution à z de sa valeur en x, y; et, pour que cette dernière équation soit intégrable, il faut qu'on ait

$$D_y(X_, + pZ_,) = D_x(Y_, + qZ_,).$$

Lorsque l'équation de la surface S n'est soluble par rapport à aucune des coordonnées, on aura une équation d'un degré supérieur au premier, ou même transcendante par rapport à dx, dy, dr, en éliminant z et dz entre l'équation (3), celle de S et sa différentielle première. Si l'équation finale est transcendante, on ne lui reconnaît aucun sens; si elle est algébrique, il faut, pour qu'elle en ait un, qu'elle soit décomposable en équations du premier degré par rapport aux différentielles. Et cependant, quand l'équation finale est transcendante, ou qu'elle est algébrique, d'un degré supérieur au premier et indécomposable, il peut se faire qu'il existe une surface normale aux droites D : ainsi, par exemple, cela sera évidemment si $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, quelle que soit d'ailleurs la surface S.

Ce qu'il faut nécessairement, comme nous l'avons indiqué d'abord, pour qu'il y ait une surface normale aux droites D, c'est que l'équation (3) soit intégrable eu égard à celle de S; et, par conséquent, que le produit du produit du premier membre de l'équation (3) par une certaine fonction de r, x, y, z soit, en tenant compte de l'équation de S, une différentielle exacte. Or, cela exige évidemment que le trinôme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ satisfasse de la même manière à cette condition; mais il faut bien qu'il la remplisse, abstraction faite de l'équation de S, lorsqu'elle ne peut servir à chasser z et dz, ce qui est le cas dont il s'agit maintenant. Supposons donc que le produit du trinôme par u, qui pourrait contenir r, soit une différentielle exacte, et représentons l'intégrale par U,

de sorte que l'équation (3) revienne à

$$(4) \qquad u\,dr + d\mathrm{U} = 0.$$

On a alors entre x, y, z, U, u et r, deux équations, savoir : l'intégrale de la précédente et l'équation de la surface S, et u, U sont des fonctions déterminées de x, y, z; par conséquent, on peut considérer x, y, z, U comme des fonctions de u, r qui resteraient indépendantes l'une de l'autre. En posant, d'après cela,

$$\mathrm{U} = \psi(r, u),$$

d'où

$$d\mathrm{U} = \frac{d\psi}{dr}dr + \frac{d\psi}{du}du,$$

l'équation (4) devient

$$\left(u + \frac{d\psi}{dr}\right)dr + \frac{d\psi}{du}du = 0,$$

qui ne peut subsister, à cause de l'indépendance de u, r, sans que l'on n'ait séparément

$$u + \frac{d\psi}{dr} = 0, \qquad \frac{d\psi}{du} = 0.$$

D'après la seconde de ces équations, U ne doit dépendre que de r, et, d'après la première, r est une fonction de u; donc U doit être une fonction de u. On verra aisément si cette condition est remplie, après avoir calculé u et U d'après le trinôme $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$; car, si l'on égale ces fonctions à deux lettres α, β, puis qu'on élimine deux des coordonnées x, y, z entre les deux équations ainsi formées et l'équation de la surface S, il sera nécessaire et suffisant, pour cela, que l'équation finale ne contienne pas la troisième coordonnée, mais seulement α et β.

Enfin, cette dernière condition forme, avec celle de l'intégrabilité du trinôme, une condition complexe évidemment suffisante pour qu'il y ait une surface normale

aux droites D; car, si $U = \varphi(u)$, on aura

$$dr = -\frac{\varphi'(u).du}{u},$$

de sorte que r se trouvera par une simple quadrature.

La discussion précédente s'applique d'ailleurs évidemment au cas particulier que nous avons d'abord examiné; et, par conséquent, la réponse à la question proposée peut être généralement formulée ainsi :

Il faut et il suffit que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ *satisfasse à la condition connue d'intégrabilité des différentielles à trois varibles, et que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée* S, *une fonction de l'intégrale.*

S'il existe une surface normale aux droites D, il y en a une infinité qui sont deux à deux équidistantes, puisque la valeur de r est de la forme

$$r = \text{const.} + F(x, y, z).$$

Enfin, il résulte de cette analyse, qu'un trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ étant donné, s'il y a, pour une certaine surface, un système de droites menées par tous ses points, et faisant avec les axes des coordonnées rectangulaires des angles dont les cosinus soient les rapports de X, Y, Z à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, qui puissent être coupées normalement par une autre surface, ce trinôme satisfera à la condition d'intégrabilité (*).

Exemples auxquels les méthodes indiquées pour trouver r s'appliquent. 1°. Les cosinus sont proportionnels à y, x, $2z$, et la surface S est l'hyperboloïde à une nappe

(*) Ce théorème diffère de celui de M. Cauchy sur le même sujet.

représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 3z^2 - xy = 0.$$

2°. Les cosinus sont proportionnels à x^2, y^2, z^2, et la surface S est représentée par l'équation

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}} = a.$$

Les deux méthodes peuvent être employées pour le premier de ces exemples; mais la seconde méthode seulement s'applique au second.

Deuxième question. — *Un système de rayons lumineux normaux à une même surface, se réfléchissent sur une surface donnée. Démontrer que les rayons réfléchis sont aussi normaux à une même surface* (*).

Ces derniers rayons sont ceux dont la réflexion est régulière.

Soient :

M un point de la surface réfléchissante, et MN la normale en ce point;

MI et MR un rayon incident en M et le rayon réfléchi correspondant;

(α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, et (λ, μ, ν) les angles qui déterminent la direction de MI, MR et MN, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; enfin, ω les angles égaux IMN et RMN.

Si l'on mène à Ox, dans le sens de cet axe, la parallèle MA, que l'on décrive une sphère de M comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, et qu'on joigne deux à deux par des arcs de grand cercle les points A, I, R, N, où cette sphère coupe MA, MI, MR, MN, on a un triangle sphérique dont la médiane AN et les côtés

(*) Théorème de Malus, généralisé par M. Bertrand.

sont représentés par λ, α, α', 2ω, et ce triangle donne

$$\cos\alpha' = 2\cos\lambda.\cos\omega - \cos\alpha,$$

par le théorème sur les médianes des triangles sphériques analogue au théorème sur les médianes des triangles rectilignes (*).

On a, de la même manière,

$$\cos\beta' = 2\cos\mu.\cos\omega - \cos\beta,$$
$$\cos\gamma' = 2\cos\nu.\cos\omega - \cos\gamma.$$

Soient encore :

x, y, z les coordonnées de M;

Et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ celles d'un point infiniment voisin de M sur la surface réfléchissante.

D'après l'équation connue

$$\cos\lambda.dx + \cos\mu.dy + \cos\nu.dz = 0,$$

et d'après celles qui précèdent, on a l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha'.dx + \cos\beta'.dy + \cos\gamma'.dz \\ &= -(\cos\alpha.dx + \cos\beta.dy + \cos\gamma.dz), \end{aligned}\right.$$

de laquelle se déduit immédiatement la démonstration du théorème.

En effet, les rayons (MI) étant normaux à une même surface, le trinôme $\cos\alpha.dx + \cos\beta.dy + \cos\gamma.dz$, dans lequel les cosinus peuvent être considérés comme des fonctions de x, y, z, remplit les conditions voulues pour qu'il y ait une surface normale à ces rayons; donc, d'après l'équation (1), le trinôme $\cos\alpha'.dx + \cos\beta'.dy + \cos\gamma'.dz$, dans lequel les cosinus sont de même des fonctions de x, y, z, remplit aussi ces conditions, et il existe, par conséquent, une surface normale aux rayons (MR), quelle que soit la surface réfléchissante.

(*) « La somme des cosinus de deux côtés d'un triangle sphérique est » égale à deux fois le produit du cosinus de la moitié du troisième côté par » celui de l'arc qui joint le milieu de ce côté au sommet opposé. »

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Thèses d'Analyse et de Mécanique, présentées à la Faculté des Sciences de Paris, le 1er mai 1851; par M. *Gerónimo Frontera*. Thèse d'Analyse: *Sur une formule de M. Cauchy*. Thèse de Mécanique (*programme*) : *Sur l'attraction des corps en général*; in-4° de 44 pages. Imprimerie de Bachelier.

1. Les propriétés des fonctions analytiques sont intimement liées aux valeurs qui annulent ces fonctions, et à celles qui les rendent infinies, c'est-à-dire à leurs racines, et à ce qu'on peut, avec M. Liouville, appeler leurs infinis. Lorsque a est un infini de la fonction $f(z)$, d'ailleurs bien déterminée, $f(z)$ est développable suivant les puissances ascendantes de $z - a$, à partir d'une puissance négative dont l'exposant est marqué par le degré de multiplicité de l'infini considéré. Parmi les coefficients de ce développement, celui de $(z-a)^{-1}$, que l'on nomme résidu de $f(z)$ relatif à l'infini a, mérite une attention particulière, comme étant très-propre à caractériser la marche de la fonction dans le voisinage de la valeur a. M. Cauchy a le premier signalé l'importance des résidus, et fondé sur le rôle qu'ils jouent dans la théorie des fonctions, une nouvelle branche de calcul, susceptible d'applications extrêmement variées. M. Cauchy a donné à ce calcul toute l'étendue possible, en considérant non-seulement des fonctions imaginaires, mais encore des variables imaginaires. Au premier abord,

une si grande généralité peut sembler un embarras, et l'on serait tenté de regarder comme stériles les efforts employés à combiner de purs symboles sans application immédiate. Il n'en est rien : la principale utilité des imaginaires consiste à rétablir la continuité là où elle a disparu. Par leur moyen, les principes se réduisent au plus petit nombre possible, en même temps que leurs conséquences se multiplient et se concentrent dans des formules d'une fécondité prodigieuse. Considérée dans son origine et dans ses développements, la théorie des résidus présente donc tous les caractères d'une science bien faite.

La première thèse de M. Frontera, la seule que nous ayons à analyser, se rapporte à cette magnifique création de notre illustre analyste.

2. Dans le § Ier (3-4), l'auteur expose le but de son travail, et indique ce qu'il y considère comme nouveau.

3. Le § II (4-6) est consacré aux définitions et aux notations du calcul des résidus.

4. Dans le § III (7-12), l'auteur, après avoir défini ce qu'on doit entendre par une intégrale prise le long d'un contour, aborde la proposition fondamentale résumée dans la formule suivante :

$f(z)$ étant une fonction bien déterminée d'une variable z de la forme

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y);$$

c, un contour fermé ne passant par aucun infini de la fonction, mais pouvant en comprendre un certain nombre dans son intérieur;

ds, un élément de ce contour;

H, le résidu relatif à un infini (a, b) situé dans l'intérieur du contour;

$2k$, la différence entre le nombre des variations des-

cendantes et ascendantes du rapport ;

$$\frac{\psi(x, y) - \psi(a, b)}{\varphi(x, y) - \varphi(a, b)},$$

pour toute l'étendue du contour parcouru dans le sens direct de rotation ;

$$\int_0^c f(z) \frac{dz}{ds} ds,$$

l'intégrale définie prise le long du contour : on a

$$\int_0^c f(z) \frac{dz}{ds} ds = 2\pi i \sum \mathrm{H} k,$$

formule où le signe $\sum$ se rapporte à tous les infinis situés dans l'intérieur du contour.

La démonstration *nouvelle* que M. Frontera donne de cette formule remarquable est très-simple. Il considère d'abord le cas où il n'y a dans le contour aucun infini de la fonction ; il suppose ensuite que le contour se rétrécisse d'une manière continue, suivant une certaine loi, qui rend l'arc s fonction d'une nouvelle variable indépendante t. La différentiation sous le signe, et cette simple remarque que la fonction étant bien déterminée reprend sa valeur quand on revient au point de départ, suffisent pour démontrer que l'intégrale est indépendante du contour considéré. D'ailleurs cette intégrale est évidemment nulle lorsque le contour se réduit à un point : elle est donc toujours nulle, tant qu'on n'a atteint aucun point pour lequel la fonction devienne infinie.

Ce premier cas établi, on suppose que le contour renferme un point racine z_1. La fonction étant développée suivant les puissances ascendantes de $z - z_1$, l'intégrale proposée se partage en plusieurs autres qui s'annulent

toutes, à l'exception d'une seule dont on trouve facilement la valeur.

5. La manière dont M. Frontera considère la proposition fondamentale présente une innovation. Au lieu de faire, avec M. Cauchy,

$$z = x + iy,$$

il pose

$$z = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

A la vérité, le théorème n'acquiert pas plus de généralité, puisqu'on obtiendrait la même intégrale en posant

$$z = x + iy,$$

et en suivant un contour différent du premier; mais on a l'avantage de pouvoir déduire du même contour une infinité de résultats en modifiant les fonctions φ et ψ.

6. Dans le § IV (13-17), M. Frontera examine avec soin le cas totalement omis par M. Cauchy, où la fonction devient infinie sur le contour même. Si l'infini considéré est multiple, l'intégrale est infinie ou indéterminée; ce cas n'offre aucun intérêt. Si l'infini est simple, l'intégrale est encore indéterminée; mais sa valeur principale est donnée par une formule remarquable qui mérite d'être connue.

7. Jusque-là on n'a qu'un théorème très-beau, très-général, mais on ne voit pas encore ce qu'il peut produire. Le § V (18-22) va nous montrer sa fécondité. De son application à des contours particuliers, naissent tout d'abord dix formules générales, dont chacune constitue à elle seule un théorème important. Ces formules à leur tour en produisent d'autres, et nous fournissent, § VI (22-28), 1° des intégrales définies tant qu'on en veut; 2° la décomposition des fractions rationnelles en fractions plus simples; 3° le moyen de développer des fonctions en séries, etc., etc.

8. Certaines intégrales deviennent indéterminées lorsque la fonction sous le signe passe par l'infini dans les limites de l'intégration; elles perdent alors toute signification précise, et, quoiqu'on puisse calculer leur valeur principale, comme celle-ci dérive d'un rapport arbitraire établi entre des quantités indépendantes, on est porté à ne voir là qu'un objet de pure curiosité. Aussi a-t-on dû souvent se demander : Mais à quoi donc servent les valeurs principales des intégrales définies singulières? M. Frontera va répondre à cette question, § VII (28-29), et nous montrer, à l'exemple de M. Cauchy, qu'elles ont leur utilité, du moins en analyse. Quelques-unes des formules précédentes donnent les valeurs principales de certaines intégrales indéterminées; ces valeurs pouvant, d'un autre côté, s'exprimer à l'aide d'intégrales définies parfaitement déterminées, il en résulte qu'on connaît ces dernières. C'est ainsi que l'on trouve

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x}\, dx = \pi \cot a\pi.$$

9. L'auteur, dans le § VIII (29-32), déduit d'une formule précédente la série de Mac-Laurin; le théorème de M. Cauchy sur la convergence de cette série; un théorème plus général de M. Laurent; le développement des fonctions périodiques en séries de sinus et de cosinus.

10. Tous les géomètres connaissent les belles formules de Laplace et de Lagrange, pour le développement des fonctions implicites; mais leur démonstration et leur emploi donnent lieu à quelques difficultés, que M. Frontera nous paraît avoir complétement vaincues, § IX (33-40). Il commence par déduire, du théorème fondamental, une formule dont celles de Laplace et de Lagrange ne sont que des cas particuliers. c étant un contour fermé,

$$\text{(1)} \qquad \Pi(z) + \theta\varpi(z) = 0,$$

une équation où le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}$ est constamment inférieur à 1 pour tous les points du contour, on arrive à ce théorème remarquable :

Le nombre des racines de l'équation (1) *est égal à celui des racines de l'équation*

$$(2) \qquad \Pi(z) = 0,$$

comprises dans le contour.

Cela posé, si F (z) est une fonction quelconque, assujettie à ne pas devenir infinie dans le contour considéré, et qui ait une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de z; si z_1, $z_2, \ldots$, z_m sont m racines de l'équation (1), comprises dans le contour; α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_m les m racines de l'équation (1), comprises dans le même contour, on aura

$$\sum_{n=1}^{n=m} F(z_n) = \sum_{n=1}^{n=m} F(\alpha_n) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(-\theta)^n}{n}\int_0^c F'(z)\left(\frac{\varpi z}{\Pi z}\right)^n \frac{dz}{ds}\,ds.$$

La formule de Lagrange est comprise dans cette dernière, en posant

$$\Pi(z) = z - \alpha_1, \quad m = 1.$$

M. Frontera montre que la série de Lagrange ne donne pas toujours le développement de la plus petite racine, contrairement à l'assertion de l'illustre auteur (*). Si, pour une valeur donnée de θ, la série est convergente, et si l'on peut tracer un contour comprenant le point qui répond à α_1 et tel que, pour tous ses points, le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{z-\alpha_1}$ soit inférieur à 1, on est assuré de deux choses : 1° que l'équation

$$z = \alpha_1 + \theta\varpi(z)$$

n'a qu'une seule racine comprise dans ce contour; 2° que

(*) L'observation est de M. Félix Chio, de Turin. (*Comptes rendus*, 1844, 2me semestre, page 556.)

la série exprime le développement de cette racine. Dans le cas où l'on ne saura pas tracer un pareil contour, on ne connaîtra pas ce que la série de Lagrange représente.

Ce paragraphe se termine par un moyen d'approcher indéfiniment des racines d'une équation, quand ces racines sont séparées, et par une méthode due à M. Cauchy, pour calculer une limite supérieure du reste dans la série de Lagrange.

11. Nous regrettons que le cadre de ce Journal ne nous permette pas d'entrer dans plus de détails ; mais ce que nous avons dit suffit pour montrer que la Thèse de M. Frontera n'est pas, comme il arrive quelquefois à ces sortes d'ouvrages, une banale amplification sur un sujet rebattu.

L'auteur, qui paraît très-bien connaître les méthodes de M. Cauchy, les expose avec beaucoup de clarté, y ajoute quelquefois, et leur donne, dans tous les cas, le dernier degré d'évidence par une discussion approfondie.

Il nous reste à émettre un vœu qui sera partagé, sans doute, par tous les amis de la science. Une thèse se distribue d'ordinaire à quelques parents et amis, cercle toujours restreint. Dans la plupart des cas, rien de mieux ; mais le remarquable écrit de M. Frontera mérite une publicité plus étendue : avec quelques additions, il pourrait tenir lieu d'un Traité élémentaire sur le calcul des résidus. Il y a longtemps qu'un pareil ouvrage est réclamé par les professeurs qui désirent de connaître cette partie des travaux de M. Cauchy : chose difficile, souvent même impossible à beaucoup d'entre eux. Ce n'est pas que notre grand géomètre cache ses découvertes, loin de là ; mais le moyen qu'il emploie pour les communiquer au public ne nous paraît pas des mieux choisis : si belle que soit une théorie, elle perd beaucoup de son charme, et il est bien difficile de s'en rendre un compte exact, quand il faut aller en chercher les morceaux dans vingt

endroits différents. D'ailleurs les volumineux recueils où sont *éparpillés* les Mémoires sans nombre de M. Cauchy, ne sont pas à la portée de tout le monde, et ceux même qui peuvent les consulter n'en sont pas souvent plus avancés, faute d'un catalogue qui les guide et leur permette de suivre, sans s'égarer, la pensée du maître.

Nous espérons que M. le D[r] Frontera voudra bien, dans l'intérêt de la science, accéder à notre vœu, et que sa Thèse viendra bientôt augmenter le nombre des savants ouvrages édités par M. Bachelier (*).

E. Prouhet,
Ancien professeur aux lycées d'Auch et de Cahors,
Maître de conférences au collége Rollin.

SOLUTION DE LA QUESTION 60

(voir t. I, p. 395);

Par M. l'abbé JULLIEN,
Du séminaire de Vals.

I. *Question* 34. Si, d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes, le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique du même degré m.

Solution. Soient

$$\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n x + B_n y + C_n z + D_n = 0 \end{array}$$

(*) Un vocabulaire qui expliquerait les mots nouveaux introduits dans la science avec une si déplorable profusion serait une œuvre très-utile. Tm.

un système de n plans,

$$M(x, y, z) = 0$$

une surface algébrique de degré m, et (x_0, y_0, z_0) l'un de ses points.

Les équations de la perpendiculaire abaissée du point (x_0, y_0, z_0) sur le plan

$$A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$$

sont

$$x - x_0 = \frac{A_k}{C_k}(z - z_0), \quad y - y_0 = \frac{B_k}{C_k}(z - z_0),$$

et les coordonnées du pied de la perpendiculaire sont

$$x_k = \frac{(B_k^2 + C_k^2)x_0 - A_k B_k y_0 - A_k C_k z_0 - A_k D_k}{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

$$y_k = \frac{-A_k B_k x_0 + (A_k^2 + C_k^2)y_0 - B_k C_k z_0 - B_k D_k}{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

$$z_k = \frac{-A_k C_k x_0 - B_k C_k y_0 + (A_k^2 + B_k^2)z_0 - C_k D_k}{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2};$$

les coordonnées du centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires abaissées du même point (x_0, y_0, z_0) sur les n plans, ont pour valeurs

(1) $$x = \frac{1}{n}\sum x_k, \quad y = \frac{1}{n}\sum y_k, \quad z = \frac{1}{n}\sum z_k,$$

le symbole $\sum$ s'étendant aux valeurs 1, 2, 3,... n de l'indice k.

Posant

$$A_k^2 + B_k^2 + C_k^2 = \Delta_k,$$

on peut écrire les relations (1) sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} x_0 \sum \frac{B_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} - y_0 \sum \frac{A_k B_k}{\Delta_k} - z_0 \sum \frac{A_k C_k}{\Delta_k} = nx + \sum \frac{A_k D_k}{\Delta_k}, \\ - x_0 \sum \frac{A_k B_k}{\Delta_k} + y_0 \sum \frac{A_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} - z_0 \sum \frac{B_k C_k}{\Delta_k} = ny + \sum \frac{B_k D_k}{\Delta_k}, \\ - x_0 \sum \frac{A_k C_k}{\Delta_k} - y_0 \sum \frac{B_k C_k}{\Delta_k} + z_0 \sum \frac{A_k^2 + B_k^2}{\Delta_k} = nz + \sum \frac{C_k D_k}{\Delta_k}. \end{cases}$$

Ces dernières équations donnent des valeurs de x_0, y_0, z_0 linéaires et entières par rapport à x, y, z, et leur substitution dans

$$(3)\qquad M(x_0, y_0, z_0) = 0$$

fournit une équation de degré m,

$$(4)\qquad \mu(x, y, z) = 0,$$

représentant le lieu du centre de moyenne distance.

II. *Remarques*. Les formules métamorphiques (2) qui servent à passer de l'équation (3) à l'équation (4), ou inversement, expriment les variables de l'une des équations par des fonctions entières de celles de l'autre; par conséquent, à un point situé à l'infini sur l'une des surfaces, correspond un point situé à l'infini sur l'autre, ce qui pouvait être facilement prévu.

Les conditions auxquelles doivent satisfaire les plans donnés, pour que les deux surfaces soient homothétiques, se réduisent aux cinq suivantes :

$$\sum \frac{A_k B_k}{\Delta_k} = \sum \frac{A_k C_k}{\Delta_k} = \sum \frac{B_k C_k}{\Delta_k} = 0,$$

$$\sum \frac{B_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} = \sum \frac{A_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} = \sum \frac{A_k^2 + B_k^2}{\Delta_k};$$

elles expriment, en effet, que les valeurs de x, y, z, don-

nées par les équations (2), sont de la forme

$$x = \rho x_0 + \alpha, \quad y = \rho y_0 + \beta, \quad z = \rho z_0 + \gamma.$$

III. Si le point (x_0, y_0, z_0) est assujetti à se trouver sur l'intersection de deux surfaces des degrés m et p, représentées par

$$M(x, y, z) = 0,$$
$$P(x, y, z) = 0;$$

substituant dans ces équations à x, y, z les valeurs de x_0, y_0, z_0, tirées des formules (2), on aura deux nouvelles équations des mêmes degrés m et p,

$$\mu(x, y, z) = 0,$$
$$\pi(x, y, z) = 0,$$

qui, considérées comme simultanées, représentent le lieu du centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires; ce lieu est donc l'intersection de deux surfaces des degrés m et p.

Le théorème qui nous occupe résulte de ce que les coordonnées du centre de moyenne distance de plusieurs points s'expriment par des fonctions linéaires et entières des coordonnées de ces points; par conséquent, ce théorème subsiste, lorsqu'on remplace le centre de moyenne distance par un autre point, dont les coordonnées sont des fonctions entières et linéaires de celles des pieds des perpendiculaires, comme serait le centre des distances proportionnelles.

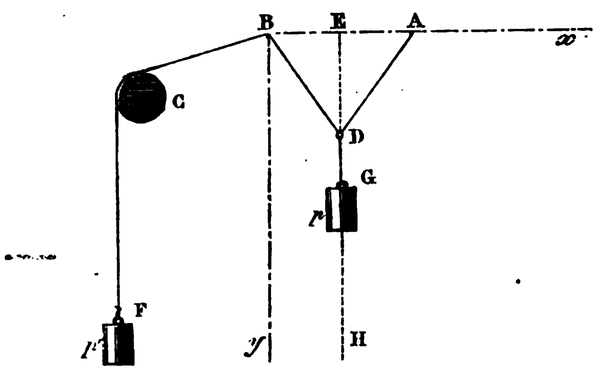
CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Un poids p est suspendu à un anneau D; dans cet anneau passe une corde qui, d'une part, est attachée à un point fixe A, et qui, d'autre part, après avoir passé sur une poulie de renvoi B, va s'enrouler sur un cylindre homogène horizontal C, mobile autour de son axe, et soutient enfin un contre-poids p'.

On fait abstraction du poids, de la roideur et de l'épaisseur de la corde, ainsi que des frottements. La poulie de renvoi B est supposée infiniment petite et à la même hauteur que le point fixe A. Trouver le mouvement du système en supposant qu'il n'y ait pas de vitesse initiale.



Nous supposerons qu'à l'instant où le mouvement commence, les cordes, considérées comme des lignes parfaitement flexibles et inextensibles, sont comprises dans le plan vertical P des centres de gravité des deux poids p, p';

que l'anneau D, considéré comme un point, est au milieu de la partie ADB de la corde AF; enfin, que le mouvement vient de ce qu'on abandonne le poids qui remontera, et que l'on avait retenu jusque-là.

Il suffit, pour répondre à la question, de déterminer le mouvement du point D. Or il est évident, à priori, que ce point ne sortira pas du plan P, et l'on peut démontrer, de plus, qu'il restera sur la verticale EH du milieu de AB. En effet : 1° le mouvement initial de D sera celui d'un point libre, auquel on appliquerait simultanément trois forces, dont la résultante est dirigée suivant EH, l'une égale à la tension de la corde DG, qui est verticale, et les deux autres dirigées suivant DA et DB, égales à la tension de la corde ADBF; 2° si l'on admet que D soit parvenu en D' sur EH, après un certain temps, et que sa vitesse acquise soit dirigée suivant cette droite, on pourra encore considérer ce point comme libre, en lui appliquant trois forces qui seront dans les mêmes conditions que les trois forces dont nous venons de parler, et le mouvement continuera dans la direction EH.

Les axes des coordonnées étant pris comme la figure l'indique, nous désignerons par y l'ordonnée de D, et par y' celle de F, à la fin de la durée t comptée depuis le commencement du mouvement.

AB étant représentée par $2a$, on doit avoir

$$y' + 2\sqrt{a^2 + y^2} = const.;$$

d'où l'on tire

$$\delta y' + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \delta y = 0$$

et

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2a^2}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$$

Les forces perdues sont représentées : pour le poids p, par

$$\frac{p}{g}\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right);$$

et pour le poids p', par

$$\frac{p'}{g}\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right),$$

car les y des centres de gravité de ces poids ne diffèrent respectivement que par des cônstantes de ceux des points D et F.

On a donc l'équation

$$\frac{p}{p'}\left(g-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(g-\frac{d^2y'}{dt^2}\right)\delta y'=0,$$

d'après une règle connue; et l'on en déduit facilement

$$(1)\quad \left\{\begin{matrix}\left(k+\dfrac{y^2}{a^2+y^2}\right)\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{a^2y}{(a^2+y^2)^2}\left(\dfrac{dy^2}{dt}\right)^2 \\ -g\left(k-\dfrac{y}{2\sqrt{a^2+y^2}}\right)\end{matrix}\right\}=0,$$

en remplaçant $\delta y'$, ainsi que $\frac{d^2y'}{dt^2}$ par leurs valeurs tirées des équations précédentes, en posant $\frac{p}{p'}=4k$.

Comme l'équation (1) ne contient pas t, son ordre s'abaisse en prenant y pour variable indépendante. Si l'on fait pour cela

$$\frac{dt}{dy}=z,$$

d'où

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{z}\quad \text{et}\quad \frac{d^2y}{dt^2}=D_y\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{z^3}\cdot\frac{dz}{dy},$$

on a

$$(2)\quad \left(k+\frac{y^2}{a^2+y^2}\right)\frac{dz}{dy}-\frac{a^2y}{(a^2+y^2)^2}z+g\left(k-\frac{y}{2\sqrt{a^2+y^2}}\right)z^3=0.$$

Cette équation, qui rentre dans le type connu sous le nom d'*équation de Bernoulli*, devient linéaire en posant

$$\frac{1}{z^2} = u,$$

d'où

$$\frac{1}{z^3} \cdot \frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dy};$$

et l'on a

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} + \dfrac{a^2}{k+1} \cdot \dfrac{2y}{(\beta^2+y^2)(a^2+y^2)}u \\ \quad = \dfrac{2g}{k+1} \cdot \dfrac{k\sqrt{a^2+y^2} - \frac{1}{2}y}{\beta^2+y^2}\sqrt{a^2+y^2}, \end{cases}$$

si l'on fait

$$\frac{a^2 k}{k+1} = \beta^2.$$

Par la comparaison de l'équation (3) avec le type

$$\frac{du}{dy} + \mathrm{Y}u = \mathrm{Y}_{,},$$

dont l'intégrale est

$$u = e^{-\int \mathrm{Y}\,dy}\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Y}_{,} e^{\int \mathrm{Y}\,dy}.dy\right),$$

on trouve facilement qu'il faut faire

$$e^{-\int \mathrm{Y}\,dy} = \frac{a^2+y^2}{\beta^2+y^2},$$

et

$$\int \mathrm{Y}_{,} e^{\int \mathrm{Y}\,dy}.dy = \frac{g}{k+1}\left(2ky - \sqrt{a^2+y^2}\right),$$

afin d'avoir l'intégrale de l'équation (3), qui est

$$u = \frac{g}{k+1} \cdot \frac{a^2+y^2}{\beta^2+y^2}\left(\mathrm{C}_{,} + 2ky - \sqrt{a^2+y^2}\right),$$

si l'on met $\frac{\mathrm{C}_{,} g}{k+1}$ au lieu de C.

Mais, $\frac{dt}{dy} = \pm \frac{1}{\sqrt{u}}$; donc on a

$$(4) \quad dt = \pm \frac{\sqrt{k+1}}{g} \cdot \sqrt{\frac{\beta^2 + y^2}{a^2 + y^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{C_{,} + 2ky - \sqrt{a^2 + y^2}}},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où le point D descend, et le signe inférieur à celui où il remonte, puisque dt doit être positive.

On ne peut intégrer l'équation (4) sous forme finie; mais il est possible de reconnaître quel sera le mouvement du point D, par la discussion de cette équation.

Il convient de déterminer, premièrement, la constante arbitraire $C_{,}$; or, en désignant par y_0 la valeur initiale de y, on voit qu'il faut prendre

$$C_{,} = \sqrt{a^2 + y_0^2} - 2ky_0,$$

pour que $\frac{dy}{dt}$ soit initialement nulle, et nous supposerons, dans ce qui suit, que $C_{,}$ a cette valeur.

Les poids p et p' resteraient en équilibre, si l'on avait

$$p = \frac{2p'y_0}{\sqrt{a^2 + y_0^2}} = p_{,};$$

par conséquent, on devra examiner successivement les deux hypothèses : $p > p_{,}$ et $p < p_{,}$.

1°. Soit $p > p_{,}$. Le poids p l'emportera, de sorte que l'on doit prendre le signe $+$ dans le second membre de l'équation (4).

Si l'on pose

$$C_{,} + 2ky - \sqrt{a^2 + y^2} = z,$$

d'où

$$\frac{dz}{dy} = 2k - \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

Pour $y = y_0$, $\frac{dz}{dy} > 0$, car $p > p_{,}$ revient à $2k > \frac{y_0}{\sqrt{a^2 + y_0^2}}$; et y augmentant à partir de y_0, $\frac{dz}{dy}$ décroît, car $\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$ augmente.

Si $2k > 1$, c'est-à-dire $p > 2p'$, ce qui emporte $p > p_{,}$, $\frac{dz}{dy}$ ne peut devenir négative, car on a toujours $\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} < 1$; et z croît indéfiniment avec y, car

$$2ky - \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{(4k^2 - 1)y - \frac{a^2}{y}}{2k + \sqrt{\frac{a^2}{y} + 1}}.$$

D'après cela, $\frac{dt}{dy}$ tend vers zéro, car $\beta^2 < a^2$, et, conséquemment, $\sqrt{\frac{\beta^2 + y^2}{a^2 + y^2}}$ est toujours moindre que 1.

Dans ce cas, comme on pouvait le prévoir, le mouvement descendant du point D continuera tant que la longueur de la corde AF le permettra, et la vitesse de ce point croîtra toujours.

Si $2k < 1$, c'est-à-dire lorsque p est compris entre $2p'$ et $p_{,}$, $\frac{dz}{dy}$ devient négative quand y dépasse la valeur

$$\frac{2ak}{\sqrt{1 - 4k^2}} = \frac{ap}{\sqrt{4p'^2 - p^2}},$$

et z, après avoir augmenté depuis zéro jusqu'à la valeur

$$C_{,} - a\sqrt{1 - 4k^2},$$

diminue, puis redevient nulle pour la valeur

$$[\alpha] \qquad y = \frac{4k\sqrt{a^2 + y_0^2} - (1 + 4k^2) y_0}{1 - 4k^2},$$

qui donne $\frac{dy}{dt} = 0$.

Dans ce cas, le point D ne peut atteindre, en descendant, la position déterminée par cette valeur de y, puisque sa vitesse $\frac{dy}{dt}$ décroît indéfiniment, en même temps qu'il s'en rapproche indéfiniment.

2°. Soit $p < p_{\prime}$. Le poids p' l'emportera, et, par conséquent, on doit prendre le signe $\dot{-}$ dans le second membre de l'équation (4).

Pour $y = y_0$, $\frac{dz}{dy} < 0$, et, y diminuant à partir de y_0, $\frac{dz}{dy}$ croît et change de signe quand y devient inférieure à $\frac{ap}{\sqrt{4p'^2 - p^2}}$ (cette valeur est moindre que y_0, dans le cas dont il s'agit maintenant, tandis qu'elle est plus grande que y_0 dans celui dont nous nous sommes occupés en dernier lieu). Comme $dy < 0$, dz est de signe contraire à $\frac{dz}{dy}$; donc z augmente depuis zéro jusqu'à

$$C_{\prime} - a\sqrt{1 - 4k^2},$$

qui répond à la précédente valeur de y, puis diminue ensuite jusqu'à zéro, qui répond à la valeur [α].

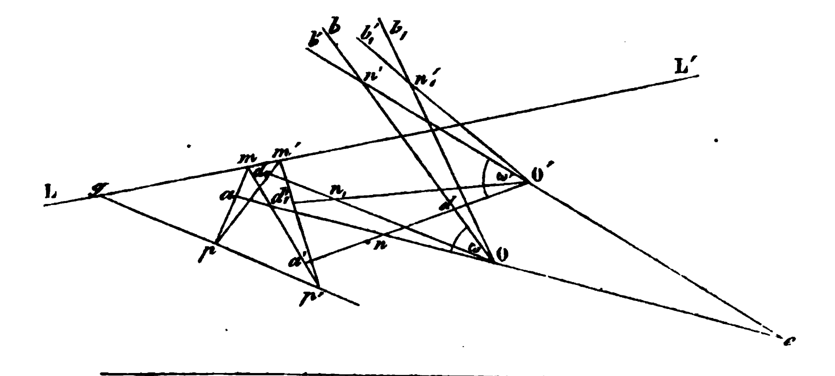
D, en remontant, tend d'après cela vers la position déterminée par la valeur [α] de y; mais sa vitesse $\frac{dy}{dt}$ tend simultanément vers zéro, et, par conséquent, cette position est une limite que D ne saurait atteindre.

GRAND CONCOURS DE 1851.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES;

PAR M. CAMILLE-ARMAND-JULES-MARIE DE POLIGNAC,
Né à Millemont [Seine-et-Oise (*)].

Étant donnée une droite LL′, on mène de chacun de ses points m, deux droites à deux points fixes p, p'. Deux autres points fixes O et O′ sont les sommets de deux angles aOb, $a'O'b'$ de grandeurs données, et constants, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs, de manière que les côtés Oa, $O'a'$ soient respectivement perpendiculaires sur mp, mp'. On demande : 1° Quelle est la courbe qui est décrite par le point d'intersection n des deux côtés Oa, $O'a'$; 2° quelle est la courbe qui est décrite par le point d'intersection n' des deux autres côtés Ob, $O'b'$, quand le point m glisse sur la droite LL′.



(*) Élève du collége Stanislas, deuxième prix. *Classe de M. Cabart.*)

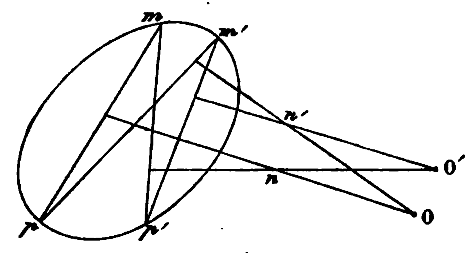
Occupons-nous de la première partie de la question. Les faisceaux issus des points p, p' sont homographiques, puisqu'ils se coupent en des points situés en ligne droite. D'ailleurs, si l'on considère le faisceau issu du point O, tous ses rayons sont perpendiculaires sur les rayons du faisceau issu du point p ; donc les angles formés par deux de ces rayons Oa, O$a_{,}$ sont égaux aux angles formés par leurs homologues pm, pm' : les faisceaux issus des points p et O sont donc homographiques. De même le faisceau issu du point O$'$ ayant tous ses rayons perpendiculaires sur ceux du faisceau p', est homographique de ce dernier ; mais p' est homographique du faisceau p ; donc les faisceaux O, O$'$ sont homographiques.

Il en résulte que le lieu des points n est une conique passant par les deux points O, O$'$. Cette conclusion repose sur ce théorème connu : Si l'on joint tous les points d'une section conique à deux points quelconques pris sur la courbe, on obtiendra deux faisceaux homographiques. Ce théorème, évident dans le cas d'un cercle, puisque les angles homologues des deux faisceaux sont tous égaux, s'étend par projection à une conique quelconque, et la réciproque est d'ailleurs facile à apercevoir. Les points n se trouvent donc sur une conique passant par O, O$'$. Passons maintenant à la seconde partie de la question.

Les rayons issus du point O, Oa, Od_1, etc., d'une part, Ob, Ob_1, etc., d'autre part, forment deux faisceaux homographiques, car les angles homologues sont égaux comme différence d'angles égaux. Pour la même raison, le faisceau O$'a'$, O$'d'_{1}$, etc., est homographique de O$'b'$, O$'b'_{1}$, etc. ; mais les faisceaux Oa, Od_1, etc., et O$'a'$, O$'d'_{1}$, etc., sont homographiques ; donc les faisceaux issus des points O, O$'$ et se coupant suivant les points n', sont

homographiques ; donc ces points se trouvent sur une conique passant par les points O et O'.

La même construction fournit deux autres coniques passant par O et O'. On verra en effet, aisément, par les mêmes considérations, que les lieux des points e et d sont deux coniques passant par les deux points en question.



Généralisation. — Remplaçons la droite LL' par une conique passant par les deux points p et p', et cherchons le même lieu que précédemment, en supposant que le point m se meuve sur la conique. D'après le théorème que nous venons de rappeler, les faisceaux issus des points p et p' seront toujours homographiques. Il en sera donc de même des faisceaux issus des points O et O', dont les rayons, en se coupant, déterminent le lieu des points n. Par suite, ces points sont situés sur une conique qui passe par O et O'.

La question donnée n'est qu'un cas particulier de celle-ci : c'est le cas où la section conique se réduit à deux droites LL', pp'.

Cherchons maintenant à reconnaître comment varie la nature des coniques (lieu des points n) avec la *courbe directrice*, et examinons d'abord la question donnée, dans laquelle la conique directrice se réduit au système des deux droites LL', pp'.

Remarquons que lorsque le point mobile sur la droite LL' se trouvera en g, les deux rayons issus de p et p' se

confondront, et les perpendiculaires menées par les points O, O′ seront parallèles, ce qui fournit un point de la courbe située à l'infini; d'ailleurs, en supposant que le point mobile s'éloigne indéfiniment sur la droite LL′, les rayons issus des points p, p' deviennent parallèles à cette droite; les perpendiculaires menées par O et O′ sont donc parallèles entre elles, et à ces lignes correspond, par conséquent, un point de la courbe situé à l'infini. Nous trouvons donc *deux* directions donnant des points à l'infini; d'ailleurs, le lieu des points n ne peut pas, dans le cas général, être une ligne droite, puisque deux rayons homologues issus des points O, O′ ne se confondent jamais (*) : le lieu cherché est donc une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires, l'une à la droite LL′, l'autre à la droite pp'.

Il sera d'ailleurs facile de construire cette hyperbole, après avoir obtenu préalablement le point n, car on connaîtra alors trois points de la courbe et la direction des asymptotes. Ces données permettent de construire aisément les diamètres conjugués des cordes qui joignent deux à deux les points n, O, O′, par suite le centre et les asymptotes. Connaissant les asymptotes et un point, une construction bien connue en fait obtenir autant qu'on veut.

Revenons au cas général, et supposons que la courbe directrice soit une ellipse. Deux rayons pm, $p'm$ ne seront jamais parallèles; de plus, ils ne se confondront jamais, car même, si l'on suppose que le point mobile soit arrivé en p, l'un des rayons sera $p'p$, l'autre la tangente au point p. Il en résulte que les droites menées

(*) Lorsque deux faisceaux homographiques ont deux rayons homologues qui se confondent, le lieu des intersections de leurs rayons est une ligne droite, et réciproquement.

par O et O′, qui déterminent les points du lieu, ne seront jamais parallèles; par suite, la courbe n'ayant aucun point à l'infini, sera une ellipse. Si la courbe directrice était un cercle, l'angle $OnO' = pmp'$ étant constant, le lieu des points n serait un segment capable de cet angle décrit sur OO′.

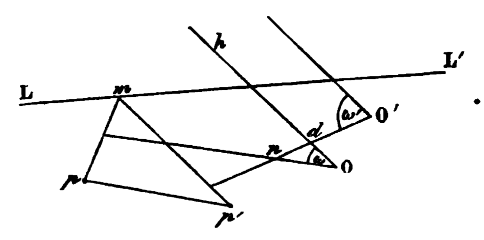
Supposons, en second lieu, que la courbe directrice soit une parabole. Lorsque le point m s'éloignera sur la courbe jusqu'à l'infini, les deux rayons pm, $p'm$ seront parallèles : ce sera d'ailleurs la seule direction pour laquelle les perpendiculaires menées par O et O′ seront parallèles. La courbe engendrée par le point n ayant des points situés à l'infini, mais dans une seule direction, sera une parabole.

Enfin, en supposant que la conique directrice soit une hyperbole, on verra pareillement qu'on trouve pour les perpendiculaires issues des points O et O′ *deux* directions donnant des points situés à l'infini, ce qui prouve que, dans ce cas, le lieu des points n est aussi une hyperbole. Ses asymptotes sont perpendiculaires aux asymptotes de la première.

Cette hyperbole pourrait d'ailleurs se réduire au système de deux droites; c'est ce qui arriverait si, par exemple, la ligne OO′ était perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole directrice. Car alors les deux parallèles menées par O et O′, qui doivent donner un point à l'infini, venant à se confondre, les faisceaux homographiques O et O′ auraient deux rayons homologues se confondant, et les intersections des autres seraient en ligne droite (*). Remarque analogue dans le cas de la parabole.

(*) C'est d'ailleurs le seul cas où le lieu des points n peut se réduire au système de deux droites.

Concluons qu'en général le lieu des points n est une conique de même nature que la courbe directrice ou une variété de cette courbe.



Lorsque le point mobile m se meut sur la droite LL', le lieu des points n peut aussi être une ligne droite, et cela arrivera quand la ligne OO' sera perpendiculaire à l'une des deux lignes pp' ou LL', ce qu'on peut déduire, comme cas particulier, de ce que nous avons remarqué précédemment. La courbe engendrée par le point n' peut aussi présenter cette particularité. En effet, si nous supposons que l'angle pmp' soit égal à $\omega' - \omega$, on aura

$$dnO = \omega' - \omega;$$

par suite, l'angle hdn sera égal à ω', et deux rayons déterminant les points n' seront parallèles; si, de plus, la droite OO' fait avec pm l'angle $90° - \omega$, ou, avec pm', l'angle $90° - \omega'$, les faisceaux homographiques qui déterminent les points n' ayant deux rayons homologues se confondant, le lieu de ces points sera une ligne droite.

Si les angles ω et ω' étaient égaux, les rayons On', $O'n'$ seraient parallèles en même temps que les rayons On, $O'n$. Donc la courbe engendrée par le point n' serait une hyperbole dont les asymptotes feraient, avec celles de l'hyperbole lieu des points n, l'angle ω; si, en même temps que $\omega' = \omega$, la droite OO' faisait avec pp' l'angle $90° - \omega$, ou, avec LL', l'angle ω, le lieu des points n' serait une ligne droite.

Remarque. Nous avons supposé jusqu'ici que les droites déterminant les points n étaient perpendiculaires sur les rayons pm, pm'; on peut encore généraliser les résultats obtenus dans cette hypothèse. Revenons, en effet, au cas général dans lequel le point m est supposé se mouvoir sur une conique passant par p et p'; menons par le point O des droites faisant un angle constant α avec tous les rayons tels que pm; par le point O', des droites faisant un angle constant α' avec tous les rayons tels que $p'm$. Le lieu des intersections de ces droites sera une conique passant par O et O'.

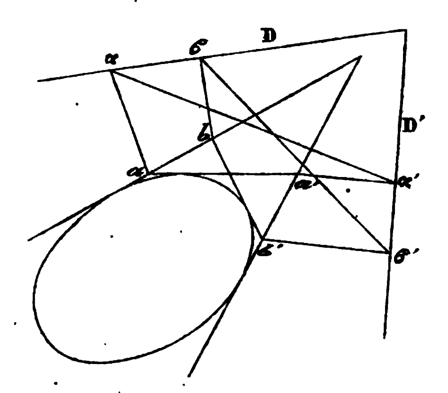
En effet, le point a, sommet d'un angle constant, se meut sur un cercle qui passe par les points p et O.

Par suite, les faisceaux issus de ces points sont homographiques. Pour une raison analogue, les faisceaux issus des points O' et p' sont homographiques. Mais le faisceau issu du point p est homographique du faisceau p'; donc les faisceaux O et O' le sont entre eux, et le point n engendre une conique passant par O et O'.

Supposons que les angles en question soient égaux, et que la ligne OO' fasse avec pp' ce même angle α : considérons deux positions quelconques correspondantes des points m et n. Les trois côtés du triangle OnO' sont également inclinés sur ceux du triangle pmp'; par suite, ces deux triangles sont semblables, et le rapport $\frac{pm}{\text{O}n}$ étant constant, il s'ensuit que le lieu des points n sera une conique semblable à la première, et le rapport de similitude sera $\frac{\text{OO}'}{pp'}$.

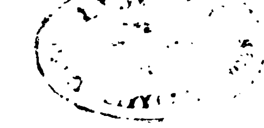
Ceci comprend, comme cas particulier, un résultat précédemment obtenu. Nous avons vu, en effet, dans le cas de la droite LL', que le lieu des points n déterminé

par les perpendiculaires menées par O et O′ était une ligne droite si OO′ était perpendiculaire sur pp'.



Proposition corrélative. — On a une conique, deux tangentes fixes et une tangente mobile. Par ses divers points d'intersection avec les deux tangentes fixes, on mène des perpendiculaires sur deux droites D, D′; on joint les pieds des perpendiculaires correspondantes. La droite $\alpha\alpha'$ enveloppe une conique.

En vertu d'un théorème, corrélatif de celui qui nous a servi à résoudre la question donnée, les points a, b,..., a', b',..., sont homographiques. Par suite, il est évident, à cause des parallèles, que les points α, β, etc., α', β', etc., seront aussi homographiques. Donc la droite $\alpha\alpha'$ enveloppe une conique tangente aux droites D, D′.



SOLUTION DE LA QUESTION 84

(voir t. III, p. 256) ;

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

On a mis dans une urne vingt billets numérotés 1, 2, 3,..., 20; sur ce nombre, il y a cinq bons billets et quinze mauvais. Vingt personnes doivent puiser successivement dans l'urne et prendre un des billets. La chance de prendre un bon billet est-elle la même pour toutes ces personnes? (FAUDOT.)

Supposons, pour être plus clair, qu'il y ait b billets blancs et n billets noirs, et supposons qu'une personne tire un premier billet. Ce billet sera blanc ou noir; par conséquent, une autre personne venant puiser dans l'urne aura la probabilité $\frac{b-1}{b+n-1}$ de tirer un billet blanc si le premier tiré était de cette couleur, ou $\frac{b}{b+n-1}$ si ce premier était noir. Or on peut tirer un billet blanc de b manières différentes; donc la probabilité d'amener un billet blanc sera $\frac{b}{b+n}$, et la probabilité d'amener un billet noir est $\frac{n}{b+n}$. Donc, si l'on multiplie la probabilité de chacune de ces hypothèses par celle relative au second tirage, et que l'on fasse la somme, on aura la probabilité pour que la seconde personne tire un billet blanc; or cette somme sera $\frac{b(b-1)+bn}{(b+n)(b+n-1)} = \frac{b}{b+n}$, c'est-à-dire égale au nombre des billets blancs divisé par le nombre des billets; donc elle est la même pour chaque personne.

EXAMEN D'UN CAS SINGULIER QUI SE PRÉSENTE DANS LA DIVISION ABRÉGÉE EN USAGE;

PAR M. ADVILLE,
Licencié ès sciences.

1. On sait comment, lorsqu'on a deux nombres décimaux à diviser l'un par l'autre, on peut déterminer, à la seule inspection de ces nombres, l'espèce des unités de l'ordre le plus élevé du quotient. On sait aussi que, si l'on veut avoir le quotient de deux nombres décimaux à une unité près, par défaut ou par excès, il suffit de conserver au diviseur un chiffre de plus que n'en doit avoir le quotient, et au dividende les chiffres placés à gauche de la virgule, après qu'on l'aura avancée ou reculée d'autant de rangs que celle du diviseur. Soient, en effet, A et B le dividende et le diviseur conservés, $A+\alpha$ et $B+\beta$ le dividende et le diviseur complets. α et β sont des fractions plus petites que l'unité, et l'on a identiquement

$$A = BQ + R,$$

d'où

$$A+\alpha = (B+\beta)Q - \beta Q + (R+\alpha),$$

$$\frac{A+\alpha}{B+\beta} = Q - \frac{\beta Q}{B+\beta} + \frac{R+\alpha}{B+\beta}.$$

Mais

$$Q < B,\quad \beta < 1,\quad \text{d'où}\quad \frac{\beta Q}{B+\beta} < 1;$$

$$R+1 < B,\quad R+\alpha < B,\quad \text{d'où}\quad \frac{R+\alpha}{B+\beta} < 1.$$

L'application simultanée de cette règle et de celle qui donne à priori le nombre des chiffres du quotient,

conduit quelquefois à une contradiction apparente, qu'on résout de la manière la plus heureuse en faisant voir que tous les chiffres du quotient sont alors des neuf.

Exemple. Soit à diviser 235745287,41 par 235766,179. Le quotient doit avoir trois chiffres, et, pour l'avoir à une unité près, il suffit de diviser 2357452 par 2357. On voit immédiatement que le quotient entier de ces deux nombres, que j'appellerai Q', aura quatre chiffres; mais il ne peut pas être plus grand que 1000. Car sans cela on aurait, par la règle qui donne le nombre des chiffres du quotient cherché,

$$Q < 1000,$$

et, par la seconde,

$$Q > Q' - 1,$$

inégalités qui seraient contradictoires; ce qui est impossible, parce qu'aucune des règles ne souffre d'exception. On a donc

$$Q' = 1000,$$

et

$$Q < 1000,$$
$$Q > 1000 - 1, \quad \text{ou} \quad 999.$$

D'où il suit que 1000 est le quotient cherché, à une unité près par excès, tandis que 999 représente le même quotient, à une unité près par défaut.

Il ne faut pas croire pourtant que toutes les fois que les chiffres du quotient seront tous des neuf, on en sera averti immédiatement comme dans l'exemple précédent. Soit, en effet, à diviser 23399,86543 par 23,4125. Le quotient devant avoir trois chiffres, il suffit, pour l'obtenir à une unité près, de diviser 2339986 par 2341; or, le quotient de cette division n'a que trois chiffres, lesquels sont tous des neuf.

2. Dans la divison abrégée proprement dite, on con-

serve généralement au diviseur deux chiffres de plus que n'en doit avoir le quotient. Et comme après chaque chiffre du quotient obtenu, on barre un chiffre au diviseur, il en résulte que le diviseur employé à la recherche d'un chiffre du quotient a toujours deux chiffres de plus, et non davantage, qu'il en reste à trouver. Cela posé, soient n le nombre des chiffres du quotient, p le nombre des chiffres obtenus par la méthode abrégée, et r_p le reste de la dernière division effectuée. On a

$$d_{(p-1)} > r_p,$$

en appelant $d_{(p-1)}$ le diviseur correspondant à r_{p-1}. Si l'on suppose qu'en barrant le dernier chiffre de d_{p-1}, on trouve

$$r_p > d_{p-1} \times 10,$$

on rencontrera précisément le cas singulier que je me suis proposé d'examiner.

Supposons qu'au lieu de barrer le dernier chiffre de d_{p-1}, on conserve ce diviseur, et qu'on achève la division à la manière ordinaire, c'est-à-dire en abaissant successivement un chiffre à la droite de r_p et des restes suivants. On obtiendra ainsi $n-p$ chiffres dont je représenterai l'ensemble par q', tandis que j'appellerai q l'ensemble des chiffres obtenus par la méthode abrégée.

$$q \times 10^{n-p} + q'$$

sera le quotient cherché à une unité près; car il est facile de voir que la démonstration synthétique de la division abrégée, qui se trouve aujourd'hui partout, s'applique à fortiori au cas où l'on achève l'opération par le procédé ordinaire de la division.

Toute la question est donc de trouver, à une unité près, le quotient q qui doit avoir $n-p$ chiffres. Et il suffit pour cela, comme nous l'avons démontré, de con-

server au diviseur $n - p + 1$ chiffres; mais d_{p-1} en a $n - p + 3$: on peut, par conséquent, en barrer un (et même deux); et si l'on trouve, après cette suppression, que les unités de l'ordre le plus élevé du quotient q' sont de l'ordre $n - p + 1$, c'est que ce quotient est, à une unité près, 10^{n-p} par excès, ou $10^{n-p} - 1$ par défaut, c'est-à-dire que le quotient cherché est

$$q \times 10^{n-p} + 10^{n-p} - 1.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

On verrait de la même manière que, si l'on rencontrait ce cas singulier en cherchant le premier chiffre du quotient, on pourrait affirmer que le chiffre des dixièmes est un neuf, et qu'il en serait de même pendant tout le cours de l'opération, si, au lieu de conserver au diviseur d'entrée deux chiffres de plus seulement que n'en doit avoir le quotient, on en conservait trois, etc., etc. (la somme des chiffres du quotient étant toujours plus petite que cent).

THÉORÈMES SUR LE QUADRILATÈRE RECTILIGNE;

PAR M. J. MENTION.

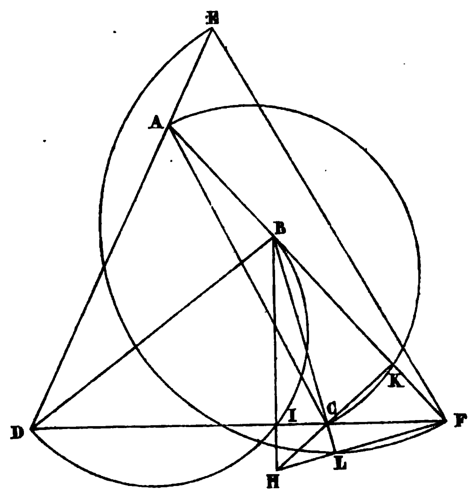
---

1. THÉORÈME. *Les trois circonférences décrites sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres, ont un même axe radical.*

Je démontrerai ce théorème en me fondant sur cette simple observation, que, s'il existe plus d'un point de commune puissance par rapport à trois cercles, les centres de ces cercles et tous les points de commune puissance sont respectivement sur deux droites perpendicu-

laires l'une à l'autre ; la seconde est l'axe radical commun des trois cercles.

Soit, en effet, un quadrilatère complet ABCDEF ; je décris sur les trois diagonales BD, AC, EF les demi-circonférences BID, CKA, ELF. Alors, les droites BI, CK, LF, hauteurs du triangle BCF, se couperont en un même point H. D'ailleurs, à cause des quadrilatères inscriptibles BICK, BILF, CKLF, les produits HI.BH, HC.HK, HF.HL sont égaux, c'est-à-dire que le point H est de commune puissance par rapport aux trois cercles. Or, comme il y a quatre triangles formés avec trois des côtés du quadrilatère, il y aura quatre points de commune puissance par rapport à nos cercles, ce qui prouve la proposition.



Mais on remarquera que l'observation faite ci-dessus met en évidence d'autres propriétés du quadrilatère ; aussi vais-je, d'un seul coup, formuler quatre énoncés :

1°. *Les trois milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite ;*

2°. *Les quatre points de rencontre des hauteurs des*

triangles formés successivement avec trois côtés du quadrilatère, sont en ligne droite (*);

3°. *La ligne des points de rencontre est l'axe radical commun des trois circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètre;*

4°. *La ligne des points de rencontre est perpendiculaire à la ligne des milieux des diagonales.*

2. Autre remarque importante : le cercle circonscrit au triangle formé par les diagonales étant orthogonal à ceux que nous venons de considérer, son centre appartiendra à la ligne des points de rencontre des hauteurs.

Corollaire. La polaire d'un quelconque des six sommets du quadrilatère complet, par rapport au cercle que déterminent les points d'intersection des diagonales, ne peut être parallèle à la ligne des milieux de celles-ci.

Car la droite qui joint ce sommet au centre du cercle serait perpendiculaire à la ligne des milieux; elle serait donc précisément la ligne des points de rencontre des hauteurs, *ligne* qui ne peut contenir aucun des sommets du quadrilatère, à moins qu'il ne dégénère en trapèze.

3. *Définition.* Deux points sont conjugués par rapport à uneco nique, lorsque la polaire de l'un d'eux passe par l'autre, et *vice versâ.*

Lemme I. Le milieu de la distance d'un point au point de concours de ces polaires par rapport à deux cercles, appartient à leur axe radical.

Lemme II. Les sommets opposés d'un quadrilatère quelconque sont respectivement conjugués au cercle passant par les points d'intersection de ses diagonales.

(*) Qu'il me soit permis de dire que je me suis en quelque sorte imposé l'usage des transversales, dans la *solution* insérée au commencement du tome V de ce Recueil, concernant ce second énoncé.

THÉORÈME. *Dans un quadrilatère complet, deux couples de sommets opposés étant conjugués par rapport à un cercle, il en sera de même à l'égard du dernier couple.* (OTTO HESSE.)

Ainsi, je suppose un cercle M pour lequel les sommets opposés (A, C), (B, D), par exemple, soient *conjugués*, et je veux montrer que les sommets E et F seront aussi *conjugués*. Du *lemme* I il résulte immédiatement que la ligne des milieux est l'axe radical du cercle M_1 circonscrit au triangle ayant pour côtés les trois diagonales, et du cercle M, parce que les polaires d'un sommet relatives aux deux cercles se croisent au sommet opposé. Encore, d'après le *lemme* I, le point de concours des polaires du sommet E se trouve sur une parallèle à la ligne des milieux (*) conduite par le sommet F : se trouvant déjà sur une seconde droite issue de F (*lemme* II), de direction différente de la première (voyez *corollaire*, art. 2), *ce point de concours* sera précisément le sommet F.
C. Q. F. D.

Le mode précédent de démonstration indique, sur-le-champ, une propriété commune à tous les cercles dont les extrémités des diagonales d'un quadrilatère complet leur sont respectivement conjuguées : *tous ces cercles ont la ligne médiane des diagonales de ce quadrilatère pour commun axe radical.*

Corollaire. Le théorème subsiste pour une conique quelconque; évident par la méthode projective.

(*) On abrégerait le discours en appelant *médiane* la ligne des milieux des diagonales d'un quadrilatère.

SUR LA LIMITE SUPÉRIEURE DES RACINES POSITIVES D'UNE ÉQUATION;

PAR M. L. GISCLARD,
Professeur au lycée de Toulouse.

THÉORÈME. *$y = f(x) = 0$ étant une équation du degré m, si $x = x_0$ donne pour $f(x)$ et ses différences, des résultats tous positifs y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^{m-1} y_0$, je dis qu'on aura une limite supérieure des racines positives de l'équation, en prenant*

$$x = x_0 + (m - 1).$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence de la formule fondamentale du calcul aux différences finies

$$y_z = f(x_0 + z) = y_0 + \frac{z}{1} \Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{1.3} \Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{z(z-1)\ldots[z-(m-1)]}{1.2\ldots m} \Delta^m y_0.$$

Remarquons d'abord que les deux membres étant du degré m par rapport à z, cette formule sera vérifiée pour toutes les valeurs de z, puisqu'elle est déjà vérifiée par les valeurs entières. Si donc y_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0, \ldots, \Delta^{m-1} y_0$ sont positifs, il est évident que si l'on prend $z = m - 1$ ou une valeur plus grande, le second membre, et par suite $f(x_0 + z)$ sera positif; car les différents coefficients seront tous positifs. Si l'on prend $z < m - 1$, un des coefficients au moins devenant négatif, on n'est plus sûr que $f(x_0 + z)$ soit positif.

On peut faire voir, du reste facilement, que lorsqu'on fait décroître indéfiniment l'intervalle des substitutions, le théorème précédent conduit à la limite des racines po-

sitives de Newton. En effet, prenons la formule générale

$$f(x_0 + nh) = y_0 + \frac{n}{1}\delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\delta^3 y_0 + \ldots;$$

δy_0, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_0$,... relatifs à l'intervalle h varieront avec h; on peut écrire le second membre sous la forme

$$y_0 + nh\cdot\frac{\delta y_0}{h} + \frac{n^2h^2}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\delta^2 y_0}{h^2} + \frac{n^3h^3}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\delta^3 y_0 + \ldots + \frac{n^m h^m}{1.2\ldots m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-m-1\right)\delta^m y_0.$$

Faisons maintenant décroître h et croître n, mais de manière à ce que nh soit constant; on aura, quand on supposera h infiniment petit,

$$f(x_0 + k) = y_0 + kf'(0) + \frac{k^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{k^m}{1.2.m}f^m(0),$$

ce qui nous conduit à la limite de Newton.

ÉNONCÉS DES QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉES AU CONCOURS POUR L'ÉCOLE NORMALE, 1851

(voir t. IX, p. 361).

Première question. — Dans toute équation de la forme

$$f(x) = 0,$$

le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations que présente le premier membre.

Deuxième question. — L'équation d'une parabole rapportée à des coordonnées rectangulaire est

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y + 1 = 0.$$

1°. Trouver, par une méthode quelconque, les coordonnées du sommet, celles du foyer, la grandeur du paramètre et l'équation de l'axe;

2°. Vérifier les résultats par une seconde méthode indépendante de la première.

Troisième question. — Expliquer comment, lorsqu'on cherche l'équation de l'ellipse d'après cette définition : Quel est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante, on trouve une équation qui peut représenter en même temps l'ellipse ou l'hyperbole, suivant que la grandeur donnée est plus grande ou plus petite que la distance des deux points.

Nota. On n'insérera pas de réponses à ces insignifiantes questions.

NOTE SUR LA THÉORIE DES LOGARITHMES;

PAR M. MOURGUE,
Professeur au lycée de Marseille.

De simples considérations d'arithmétique permettent d'arriver à l'inégalité

$$\log\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right)<\frac{1}{9.10^n},$$

et d'en déduire une limite de l'erreur commise dans l'emploi de la proportion tabulaire.

Admettons, pour un instant, l'inégalité

$$(1+\alpha)^m < 1 + m\alpha(1+\alpha)^m,$$

dans laquelle m désigne un nombre entier, et α un nombre commensurable ou non.

Si, après lui avoir donné la forme

$$\alpha > \frac{(1+\alpha)^m - 1}{m(1+\alpha)^m},$$

on pose

$$1 + \alpha = \sqrt[m]{10},$$

il en résulte

$$\alpha > \frac{9}{10\,m},$$

et, par suite,

$$1 + \frac{9}{10\,m} < \sqrt[m]{10};$$

d'où l'on déduit, en faisant $m = 9.10^n$,

$$1 + \frac{1}{10^{n+1}} < \sqrt[9.10^n]{10}.$$

Mais, dans le système décimal dont il s'agit ici, le logarithme de $\sqrt[9.10^n]{10}$ est $\frac{1}{9.10^n}$. Donc

$$\log\left(1 + \frac{1}{10^{n+1}}\right) < \frac{1}{9.10^n}.$$

Cela posé, on a

$$\log(N+h) - \log N = \log\frac{N+h}{N},$$

$$\log(N+2h) - \log(N+h) = \log\frac{N+2h}{N+h};$$

d'où

$$\log\frac{N+h}{N} - \log\frac{N+2h}{N+h}$$
$$= \log\frac{(N+h)^2}{N^2+2Nh} = \log\left(1 + \frac{h^2}{N^2+2Nh}\right).$$

Pour une même valeur de h, cette dernière quantité diminue quand N augmente, et, pour une même valeur de N, elle diminue avec h.

Soient maintenant $h = \frac{1}{10^2}$ et $N = 10^4$, on aura

$$\log\left(1 + \frac{h^2}{N^2 + 2Nh}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{10^{12}}\right) < \frac{1}{9.10^{11}}.$$

Ainsi, quand un nombre $N \geqq 10\,000$ reçoit des accroissements successifs égaux à $\frac{1}{100}$, il en résulte, pour son logarithme, des accroissements correspondants, dont les valeurs vont en décroissant, et deux de ces valeurs consécutives sont égales entre elles, à moins de $\frac{1}{9.10^{11}}$.

Soit i le premier de ces accroissements; le second sera compris entre i et $i - \frac{1}{9.10^{11}}$, le troisième entre i et $i - 2\frac{1}{9.10^{11}}, \ldots$, le centième entre i et $i - 99.\frac{1}{9.10^{11}}$.

Donc, si le nombre N croît de 100 centièmes ou 1, la variation Δ de son logarithme sera la somme des cent accroissements précédents, et sera comprise entre $100i$ et $100\,i - \frac{100.99}{2}.\frac{1}{9.10^{11}}$, c'est-à-dire que

$$\Delta = 100\,i - \frac{\theta.100.99}{2.9.10^{11}},$$

en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1.

De même, si le nombre N croît de p centièmes, on aura, pour la variation de son logarithme,

$$D = pi - \frac{\theta' p(p-1)}{2.9\,10^{11}}.$$

On déduit de là

$$D - \Delta\frac{p}{100} = \frac{\theta p.99 - \theta' p(p-1)}{2.9.10^{11}}.$$

Or, pour $p < 100$, le numérateur est inférieur à 10^4, et le second membre est plus petit que $\frac{1}{18.10^7}$ ou $\frac{1}{1,8.10^8}$.

Ainsi l'égalité $D = \Delta \frac{p}{100}$, qui n'est autre chose que la proportion usitée, donne pour D une valeur exacte, à moins de $\frac{5}{9}$ d'une unité du huitième ordre. Cette limite est la moitié environ de celle que donne l'algèbre, comme on le voit dans l'intéressant article de M. Serret (p. 31).

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité précédemment admise.

De l'égalité

$$(1+\alpha)^m = (1+\alpha)^{m-1}(1+\alpha),$$

on déduit

$$(1+\alpha)^m < (1+\alpha)^{m-1} + \alpha(1+\alpha)^m,$$
$$(1+\alpha)^{m-1} < (1+\alpha)^{m-2} + \alpha(1+x)^m,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$1+\alpha < 1 + \alpha(1+\alpha)^m;$$

d'où, par addition,

$$(1+\alpha)^m < 1 + m\alpha(1+\alpha)^m.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire; par *H.-Ch. de la Trémoire*. Seconde édition, entièrement revue et corrigée par *E. Catalan*, docteur ès sciences, etc. In-8°, pages LI-347; 14 planches. Paris, 1852. (Voir *Nouvelles Annales*, t. II, p. 515.)

La première édition de cet ouvrage laissait beaucoup à désirer sous le rapport de l'ordre et de la qualité des

matières; on y remarquait aussi l'absence de plusieurs théories importantes. M. E. Catalan a bien voulu se charger de faire disparaître ces imperfections, et nous croyons qu'il y a complétement réussi. Les questions ont été disposées dans un meilleur ordre : quelques-unes, d'un moindre intérêt, ont été supprimées et remplacées par d'autres, choisies parmi les plus ingénieuses et les plus fécondes de la géométrie moderne.

Ne pouvant faire ici une analyse que ne comporte pas la nature de l'ouvrage, nous indiquerons sommairement les principales additions dues à M. Catalan; elles consistent dans les théories suivantes : *Transversales, polaires, division harmonique, axes radicaux, centres de moyennes distances, cercles satisfaisant à des conditions données, isopérimètres, polygones gauches, propriétés générales des polyèdres, points réciproques et droites réciproques, plans polaires, plans radicaux, cercles conjugués, transversales sphériques,* etc.

Après cette énumération, on s'étonnera que l'ouvrage n'ait que 347 pages, et que tant de richesses soient renfermées dans un si petit espace. L'explication en est bien simple. M. Catalan, cela doit être bien connu de nos lecteurs, sait unir la concision à la clarté (*). D'ailleurs

(*) Nous citerons toutefois un passage où la concision paraît nuire à la clarté et même à la rigueur du raisonnement. Voici les paroles de l'auteur :

« Remarquons d'abord qu'*avec des côtés donnés, on peut toujours former un polygone convexe inscriptible à une certaine circonférence ; et l'on n'en peut former qu'un.*

» En effet, si dans une circonférence donnée, on prend des cordes successives, respectivement égales aux côtés donnés, l'extrémité de la dernière tombera *en deçà* ou *au delà* du point de départ, suivant que la circonférence sera trop grande ou trop petite. Or il y a des circonférences de toutes les grandeurs ; donc il en existe une, et une seule, telle que l'extrémité de la dernière corde coïncide avec le point de départ. »

Nous n'accordons pas que l'extrémité de la dernière corde tombe *au delà*

rien ne simplifie la science comme l'emploi des méthodes générales. On trouvera dans le livre des questions célèbres auxquelles on avait autrefois consacré de longs Mémoires, et dont la résolution tient aujourd'hui tout entière en quelques lignes.

Nous terminerons en indiquant à l'auteur quelques sujets dont il pourrait enrichir une nouvelle édition de son ouvrage. Un choix convenable de questions prises dans la géométrie de la règle et dans celle du compas serait, je crois, de nature à intéresser une certaine classe de lecteurs. J'en dirai autant de la décomposition des figures équivalentes en parties superposables, genre de problèmes qui donne lieu à d'ingénieuses combinaisons. (*Nouvelles Annales*, tome VI, page 434.) E. Prouhet.

QUESTIONS.

251. Placer les huit premiers nombres sur une même ligne, de telle sorte que la différence de deux quelconques de ces nombres ne soit pas égale à la différence de leurs rangs dans la ligne. Combien existe-t-il de dispositions de

---

du point de départ, par cela seul que la circonférence est trop petite. En effet, soit un cercle partagé en deux segments inégaux par une corde AB. Dans le plus petit des segments, à partir du point B, inscrivons plusieurs cordes successives dont la dernière se termine en L, en deçà du point A. Cela posé, la droite AB restant fixe, si l'on fait varier le rayon du cercle, le point L se *rapprochera* du point A si le cercle *augmente*, et s'en *éloignera* si le cercle *diminue*.

La grandeur du cercle n'est donc pas la seule chose que l'on doive considérer ici; il faut en outre avoir égard à la manière dont le centre est situé par rapport à un côté supposé fixe.

Voir les *Nouvelles Annales*, tome IX, page 134.

ce genre?

17582463

est une de ces dispositions.

Placer sur un échiquier huit *reines*, de manière que aucune d'elles ne soit en prise à l'une des sept autres? La solution est une conséquence de la précédente.

(E. LIONNET.)

252. En ôtant les doubles du jeu ordinaire du *domino*, il reste vingt et une pièces. On peut ranger ces vingt et une pièces sur une seule ligne en se conformant à la règle connue du jeu. De combien de manières cet arrangement est-il possible (*)?

253. Étant donnés deux cônes de révolution autour du même axe; un plan tangent au premier cône coupe le second cône suivant une conique, et un plan tangent au second cône coupe le premier cône suivant une seconde conique. Une de ces coniques est égale à la *focale* de l'autre conique.

On nomme *focale* d'une conique le lieu géométrique de ses foyers situé dans l'espace. (VACHETTE, *Nouvelles Annales*, t. I, p. 417.) (DIEU.)

254. Soient, dans un même plan,

A, B, C, trois points situés sur la droite X,
A', B', C', trois points situés sur la droite X',
A'', B'', C'', trois points situés sur la droite X''.

Formons un système de neuf droites

$$(1)\qquad \begin{cases} A'A'',\ B'B'',\ C'C'',\\ A''A,\ B''B,\ C''C,\\ AA',\ BB',\ CC', \end{cases}$$

(*) Question combinatoire difficile que nous avons vainement proposée à plusieurs analystes distingués.

où AA' est la droite qui passe par les points A et A', et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf points,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} B'B''.C'C'', & C'C''.A'A'', & A'A''.B'B'', \\ B''B.C''C, & C''C.A''A, & A''A.B''B, \\ BB'.CC', & CC'.AA', & AA'.BB', \end{array}\right.$$

où $B'B''.C'C''$ est le point d'intersection des droites $B'B''$ et $C'C''$, etc.

Si les points de l'une quelconque des colonnes verticales sont en ligne droite, les points des deux autres lignes verticales sont aussi en ligne droite; les trois droites se rencontrent en un même point, et les trois droites X', X'', X''' se rencontrent aussi en un même point. La réciproque a lieu.

Soient, dans un même plan,

A, B, C, trois droites concourant au point X,
A', B', C', trois droites concourant au point X',
A'', B'', C'', trois droites concourant au point X''.

Formons un système de neuf points, tableau (1), où $A'A''$ est maintenant le point d'intersection des droites A' et A'', et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf droites, tableau (2), où $B'B''$, $C'C''$ est maintenant la droite qui passe par les points $B'B''$ et $C'C''$, etc. Si les droites de l'une quelconque des colonnes verticales concourent en un même point, il en sera de même des droites des deux autres colonnes verticales; les trois points de concours sont sur une même droite, et les trois points X, X', X'' sont aussi sur une même droite. La réciproque a lieu.

Donner une démonstration géométrique sans figures ou une démonstration algébrique sans calculs. (CAYLEY.)

MOYEN DE CALCULER PROMPTEMENT LES RACINES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ, QUI N'A AUCUNE RACINE RÉELLE;

PAR M. KORALEK,
Professeur.

1. La résolution d'une équation du quatrième degré revient, comme on sait, à trouver une fonction des racines qui n'ait que trois valeurs. On a employé trois genres de fonctions : 1° $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$; c'est la solution d'Euler, que Lagrange considère comme la plus simple (*Résolut. des Équations numériques*, note XIII, p. 366; troisième édition, 1826). 2° $x_1x_2 + x_3x_4$; c'est à quoi ramène la solution de Ferraris, comme le fait voir M. Serret dans son excellent *Traité d'Algèbre supérieure*, p. 218; 1849. Dans cette méthode, on n'a besoin de connaître qu'une seule racine de la résolvante. 3° $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$; c'est le $\frac{1}{2}\xi'$ de Lagrange (*Résolut. des Équations numériques*, p. 264); mais il ne s'arrête pas à cette fonction et la ramène à la précédente, $x_1x_2 + x_3x_4$, qu'il désigne par u. Or, lorsque toutes les racines sont imaginaires, il est plus avantageux de s'en tenir au calcul de $\frac{1}{2}\xi'$.

En effet, soit

$$x^4 - 2ax^3 + bx^2 - 2cx + d = 0$$

une équation que l'on suppose n'avoir aucune racine réelle; les racines sont donc de la forme

$$\alpha \pm \beta i, \quad \alpha' \pm \beta' i;$$

les trois valeurs de $\frac{1}{2}\xi'$, ou de

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad (x_1 + x_4)(x_2 + x_3),$$

sont donc

$$4\alpha\alpha',\ (\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2,\ (\alpha+\alpha')^2+(\beta-\beta')^2.$$

Ainsi les trois racines de la résolvante sont réelles, deux sont positives, et $4\alpha\alpha'$ est la plus petite de ces racines. On peut obtenir cette résolvante par la théorie connue des fonctions symétriques; mais on y parvient plus promptement à l'aide des relations newtoniennes, entre les racines et les coefficients de l'équation. Ces relations donnent

$$\begin{aligned}
&\alpha+\alpha'=a,\\
&\alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2+4\alpha\alpha'=b,\\
&\alpha'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha(\alpha'^2+\beta'^2)=c,\\
&(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)=d.
\end{aligned}$$

Posons

$$y=\alpha\alpha',$$

la deuxième et la troisième équation donnent

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{(b-4y)\alpha-c}{\alpha-\alpha'},\quad \alpha'^2+\beta'^2=\frac{(4y-b)\alpha'+c}{\alpha-\alpha'}.$$

Substituant ces valeurs dans la quatrième équation, et se rappelant que $(\alpha-\alpha')^2=a^2-4y$, on obtient

$$(1)\ 16y^3-8by^2+(b^2+4ac-4d)y-abc+abd+c^2=0,$$

et y est le $\frac{1}{2}\xi'$ de Lagrange. Cette équation ayant deux racines positives doit présenter au moins deux variations, ce qui établit des relations d'inégalité entre les coefficients de l'équation.

Soient y_1, y_2, y_3 les racines de cette équation rangées suivant l'ordre ascendant de grandeur; on aura

$$\begin{aligned}
&\alpha\alpha'=y_1,\\
&(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2=a^2+2y_1+(\beta-\beta')^2=4y_2,\\
&(\alpha+\alpha_{,})^2+(\beta-\beta')^2=a^2+2y_1+(\beta+\beta')^2=4y_3;
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les valeurs de β et β' en fonction des trois racines y_1, y_2, y_3.

On a aussi

$$\alpha + \alpha' = a,$$

$$\alpha = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - y_1}, \quad \alpha' = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - y_1}.$$

On a trouvé ci-dessus,

$$\beta^2 = \frac{(b - 4y_1)\alpha - c}{\alpha - \alpha'} - \alpha^2;$$

donc la seule valeur de y_1 suffit pour déterminer β et aussi β'.

Observation. α étant réel, on a toujours

$$y_1 \leqq \frac{a^2}{4},$$

lorsque les quatre racines de l'équation donnée sont imaginaires. On a

$$4y_2 \geqq a^2 + 2y',$$

et, à fortiori,

$$4y_2 \geqq a^2 + \frac{a^2}{2}, \quad \text{ou} \quad 4y_2 \leqq \frac{3a^2}{2},$$

et, de même,

$$4y_3 \geqq \frac{3a^2}{2};$$

on a

$$\beta\beta' = y_3 - y_2.$$

1er *Exemple :*

$$x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 80x + 125 = 0,$$
$$a = 4, \quad b = 42, \quad c = 40, \quad d = 125;$$

tous les termes de la résolvante étant divisés par 16, on obtient

$$y^3 - 21y^2 + 119y - 195 = 0,$$
$$y_1 = 3, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 13,$$
$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 1.$$

On a deux moyens de trouver β et β'; chacun d'eux donne

$$\beta = 4, \quad \beta' = 2,$$

donc

$$x = 1 \pm 2i, \quad x = 3 \pm 4i.$$

Nous donnerons dans un autre article le caractère analytique qui fait connaître qu'une équation du quatrième degré n'a aucune racine réelle (*).

Remarque. La résolvante qui correspond à la fonction

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$$

a pour racines

$$4(\alpha + \alpha')^2, \quad -4(\beta + \beta')^2, \quad -4(\beta - \beta')^2,$$

c'est-à-dire une racine positive et deux négatives. Cette résolvante est

$$y^3 - 4(a^2 - 2b)y^2$$
$$+ 16(3a^4 - 4a^2b + b^2 - 4ac - 4d)y - 8(a^3 + ab - c)^2 = 0,$$

et elle doit offrir deux permanences et une variation; donc on doit avoir

$$2b > a^2 \quad \text{et} \quad 3a^4 + b^2 > 4a^2b + 4ac + 4d,$$

et cette résolvante peut évidemment servir aussi à trouver les valeurs de α, α', β, β'.

Note historique sur FERRARIS (Louis). — Il est né à Bologne, le 2 février 1522, d'une famille originaire de Milan et que des événements politiques avaient forcé de se réfugier à Bologne, où elle était tombée dans une triste position. Le jeune Ferraris fut envoyé à Milan, à l'âge de quinze ans, et entra dans la maison de Cardan pour y vaquer à des soins domestiques. Cardan ayant re-

---

(*) Le défaut d'espace nous oblige de supprimer un second exemple où l'habile calculateur trouve avec 12 décimales exactes les racines d'une équation dont les coefficients ont 14 à 15 décimales.

connu des dispositions au jeune Ferraris, le fit étudier et se l'attacha comme secrétaire. Ses progrès dans les mathématiques furent si rapides, qu'il professa ces sciences à dix-huit ans, et découvrit, n'ayant que vingt ans, la solution des équations biquadratiques; et voici à quelle occasion. Jean Colla, mathématicien de Brixen, avait proposé cette question : *Trouver trois nombres en progression continue; on donne la somme* 10 *des trois nombres, et le produit 6 du premier par le second.* Algébriquement traitée, la question conduit à une équation biquadratique, que Ferraris parvint à résoudre par la méthode qui porte son nom (*). Le cardinal Hercule Gonzague, de Mantoue, le prit sous sa protection, et le fit charger de lever la carte du Milanais; cette opération fut sa principale occupation pendant vingt années consécutives. Il fut aussi précepteur du fils de l'empereur Ferdinand Ier, devenu empereur sous le nom de Maximilien II. Ayant ramassé une certaine fortune, et contrairement à l'avis de Cardan, il retourna à Bologne vers 1564, et y mourut en octobre 1565, à l'âge de quarante-trois ans. Ferraris n'a rien écrit; c'est à Cardan que nous devons de connaître ses découvertes mathématiques, et une Notice biographique (*Card. Opera omnia*, t. IX, p. 568; édition de Lyon, 1663). Le portrait qu'il en trace, très-flatteur sous le rapport intellectuel et physique, laisse beaucoup

(*) Cardanus. *Ars magna*, cap. XXXIX, *quest.* IV, *regula* II. Voici ses paroles : *Alia est regula nobilior præcedente et est Ludovici de Ferrariis qui eam me rogante invenit.*

La règle est plus détaillée dans l'Algèbre de Bombelli, p. 353. *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli, divisa in tre libri, in Bologna per Giovanni Rossi*, 1579, in-4. Cet ouvrage très-rare existe à la Bibliothèque nationale.

Le célèbre professeur de Kœnigsberg, M. Otto Hesse, élève de l'illustre Jacobi, a rattaché les résolutions des équations cubiques et biquadratiques à la théorie des déterminants; nous ferons connaître ces solutions remarquables.

à désirer sous le rapport moral. On soupçonne sa sœur Madeleine, veuve et son unique héritière, auprès de laquelle il s'était retiré, de l'avoir fait empoisonner. Cardan dit qu'elle montra peu d'affliction, se remaria quinze jours après, et fit donation de tous ses biens à son mari : la discorde ne tarda pourtant pas à se mettre dans le ménage, et le mari relégua sa femme à la campagne, où, vieille, elle traîna une existence malheureuse. Cardan voit là une juste punition. Toutefois, cet odieux soupçon peut n'être pas fondé; la vie désordonnée de Ferraris explique très-naturellement sa fin prématurée. Cardan dit que Ferraris a fait un travail sur les Commentaires de César et sur l'Architecture de Vitruve.

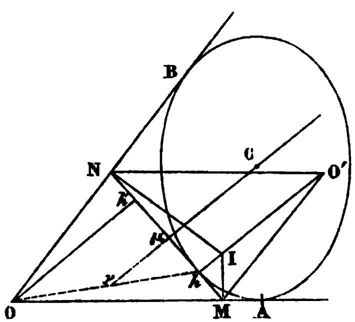
Les premiers algébristes n'étaient occupés qu'à trouver des nombres *pensés;* c'est à cette occupation qu'on doit la résolution des équations. Comme les questionneurs ne pensaient que des nombres positifs, on rejetait les solutions négatives comme inutiles; de là le nom de *racines fausses,* que Descartes donne encore par habitude aux racines négatives. C'est pourtant la Géométrie de Descartes qui donna la première signification des solutions négatives. La géométrie contemporaine paraît être sur la voie de nous apprendre l'emploi pratique des racines imaginaires. Cette théorie est encore enveloppée de nuages, et son introduction dans l'enseignement présenterait de grands dangers; mais il ne faut pas la dédaigner. En toutes choses, le dédain est un mauvais conseiller.

On trouve deux épigrammes de Ferraris, l'une en grec, l'autre en latin, dans les deux poëmes du savant milanais Conti (Noël); *de Horis, liber unus* (grec et latin); de anno libri IV.

THÉORÈME SUR LES CONIQUES;

PAR M. PAUL SERRET,
Professeur.

THÉORÈME. *Soit* AOB *un angle fixe circonscrit à une ellipse; et soit* MN *une tangente à cette courbe, telle que la portion interceptée* MN *entre les côtés de l'angle fixe* AOB *soit un minimum. Les deux points* M, N *sont également distants du centre* C *de la courbe.*



Ce théorème a été donné par M. Liouville, dans son cours au Collége de France, en même temps que d'autres théorèmes généraux sur les polygones à périmètres minimum circonscrits à une ellipse; l'emploi des coordonnées elliptiques conduit, ainsi que l'a montré M. Liouville, à des démonstrations très-élégantes de toutes ces propositions.

Le théorème énoncé plus haut peut aussi se démontrer géométriquement d'une manière simple, ainsi qu'il suit :

Il faut faire voir que la droite $C\mu$, qui joint le centre C de la conique au milieu μ de MN, est perpendiculaire à MN.

Pour le démontrer, j'observe que, si l'on passe de la tangente MN, correspondant au minimum, à une tangente infiniment voisine M'N', la différence entre les longueurs MN, M'N' sera *du second ordre infiniment petit*, et cela d'après la propriété fondamentale commune au maximum et au minimum. Donc, aux infiniment petits du second ordre près, on aura MN = M'N'; donc le point h, où MN touche la conique, sera le point où la droite MN, de longueur constante, inscrite dans l'angle AOB, touche son enveloppe. Donc, d'après la théorie des centres instantanés de rotation, si l'on mène par MN des perpendiculaires respectives à OM, ON, perpendiculaires qui se coupent en I, Ih sera perpendiculaire à MN. Mais il est facile de voir que la droite Ih ainsi construite passe par le sommet O' du parallélogramme OMO'N, construit sur les côtés OM, ON. Donc, si l'on abaisse du point O, Oh' perpendiculaire sur MN, le milieu μ de hh' coïncidera avec le milieu μ de MN.

Cela posé, si nous construisons la droite lieu des centres des coniques inscrites dans l'angle AOB, et touchant MN au point h, nous trouvons que cette droite passe par μ et qu'elle est perpendiculaire à MN. Car, d'après le théorème de M. Gergonne, cette droite doit passer, 1° par le point μ milieu de MN; 2° par le point ν milieu de la droite Oh. Or, ν étant, par définition, le milieu de Oh, et μ étant, comme nous l'avons démontré, le milieu de hh', la droite $\mu\nu$, lieu des centres, est parallèle à Oh, c'est-à-dire perpendiculaire à MN. Donc le centre C de la conique considérée se trouvant sur cette droite $\mu\nu$ perpendiculaire au milieu de MN, le théorème est démontré.

Remarque. Quand la conique inscrite dans l'angle AOB est une parabole, le théorème précédent ne s'applique plus; mais la méthode que j'ai suivie pour le démontrer conduit encore au résultat : car la condition du minimum

est toujours que la droite $O'h$ soit perpendiculaire à MN. Mais l'on sait que (*), pour la parabole, le sommet O' du parallélogramme construit sur OM et ON, est sur le diamètre passant par le point de contact h de MN. Donc le diamètre correspondant à la tangente à segment minimum est perpendiculaire à cette tangente. Donc :

THÉORÈME. *Un angle fixe étant circonscrit à une parabole, de toutes les tangentes à la courbe, la tangente au sommet est celle qui laisse dans l'angle fixe un segment minimum* (**).

M. Liouville a donné aussi le théorème suivant :

THÉORÈME. *Étant donné un angle fixe* AOB *circonscrit à une ellipse, soit* MN *une tangente à la courbe, et telle, que la somme des segments* MO + NO *qu'elle détermine sur les côtés de l'angle fixe soit un maximum ;* F, F' *étant les deux foyers de la courbe ; on aura*

$$FM.F'M = FN.F'N,$$

de sorte que les deux points M *et* N *seront sur une même ellipse de Cassini homofocale à l'ellipse proposée.*

Démonstration. On verra, en effet facilement, que le point de contact h de la tangente MN qui satisfait à la condition du maximum, doit être le point où la droite MN, se mouvant dans l'angle AOB de manière que la somme OM + ON reste constante, touche son enveloppe.

Déterminant le point h par cette dernière condition, on arrive à cette égalité

$$(1) \qquad Mh.MO = Nh\ NO, \quad \text{ou} \quad \frac{Mh.MO}{Nh.NO} = 1.$$

(*) On le voit d'ailleurs immédiatement sur la figure, puisque $O'h$ est parallèle à $\mu\nu$ qui représente la direction des diamètres de la parabole.

(**) *Voir* tome III, page 187, § XIV.

D'un autre côté, quelle que soit la tangente MN, on a

$$(2)\qquad \frac{Mh.MO}{Nh.NO}=\frac{FM.F'M}{FN.F'N}.$$

Comparant (1) et (2), il en résulte que l'on a, pour le cas du maximum,

$$\frac{FM.FM'}{FN.F'N}=1,\quad \text{ou}\quad FM.F'M=FN.F'N.$$

C. Q. F. D. (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 249

(voir t. XI, p. 48);

PAR MM. A. DALLOT; CASIMIR REY, élève en mathématiques supérieures au lycée Louis-le-Grand; BOURGHON, élève en mathématiques supérieures au petit séminaire d'Iseure (près Moulins); A. EYRIAND, de Douai; ARON FRANK, élève de l'institution Coutant (**).

Un nombre pair donné étant décomposé, autant de fois que faire se peut, en deux facteurs, l'un impair (l'unité comprise) et l'autre pair; la somme des facteurs pairs, moins la somme des facteurs impairs correspondants, est égale à la somme de tous les diviseurs de la moitié du nombre donné. (JACOBI.)

Il est évident que tous les diviseurs impairs du nombre donné peuvent servir à une décomposition. Soit $2^m.a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots$ ce nombre; a, b, c,..., étant des facteurs premiers impairs. La somme de ses diviseurs a pour expression

$$(S)\quad (1+2+2^2+\ldots+2^m).\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}.\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\ldots$$

(*) *Voir* tome III, page 184, § V. TM.

(**) Ces cinq solutions ne diffèrent pas essentiellement.

Pour avoir la somme des diviseurs impairs, il faut retrancher de l'expression (S) tous les termes dans lesquels entre le facteur 2. Il reste, après la soustraction,

$$(\sigma) \qquad \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots$$

Les diviseurs pairs correspondants sont ceux du nombre proposé dans lesquels entre le facteur 2^m; ils ont pour somme

$$(\Sigma) \qquad 2^m.\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots$$

Retranchant (σ) de (Σ), on obtient

$$(2^m-1).\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots,$$

c'est-à-dire la somme des diviseurs du nombre

$$2^{m-1}.a^\alpha.b^\beta.c^\gamma\ldots,$$

moitié du nombre donné.

MÉLANGES.

1. Je crois utile d'indiquer un ouvrage qui contient beaucoup de petits procédés pour faire de grands calculs. Cet opuscule a pour auteur M. Alexandre Gossart, ancien professeur de comptabilité, etc.; le titre est : *Sténarithmie*, ou *abréviation des calculs*, etc.; in-12 de 116 pages, 1852. (Se trouve chez Bachelier.)

L'auteur recommande de faire les additions, non chiffre à chiffre, mais par deux chiffres à la fois; c'est une ha-

bitude facile à prendre et qui abrége beaucoup ; il veut aussi que l'on s'accoutume à faire des additions horizontalement. Ce sont de bons conseils à suivre.

2. M. le professeur Dejardins indique la courbe suivante, pour opérer la trisection d'un angle. Soit une circonférence donnée ; C le centre et P un point fixe sur la circonférence. Menons le rayon quelconque CM ; sur le prolongement de CM prenons MM_1 égal à la corde PM ; le lieu du point M_1 est la courbe trisectrice. En effet, l'angle M_1PM est évidemment le tiers de l'angle M_1PC. Cette courbe étant tracée peut servir à tiercer un angle (*voir* t. X, p. 297).

3. Aucune biographie ne donne les *prénoms* de Vandermonde. M. Chasles possède deux autographes du célèbre géomètre ; l'un porte ces prénoms : *Alexandre-Théophile*. Avec l'autorisation du savant et généreux professeur, nous publierons un de ces documents, qui présente un intérêt historique.

4. M. Ernest de Sécillon, élève au lycée de Poitiers, énonce cette proposition :

Dans un quadrilatère gauche ABA'B', *les côtés opposés* AB, A'B' *étant égaux ; les plans menés par les milieux des côtés* AA', BB' *respectivement perpendiculaires à ces côtés, se coupent toujours suivant la même droite, quelle que soit la longueur de* AB.

Et il se sert de cette proposition pour mener un plan tangent à la surface engendrée par une droite de longueur donnée inscrite entre deux directrices fixes, le plan étant mené par un point pris sur la surface (voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 364 et 365).

5. *Nouvelle Théorie des proportions et progressions harmoniques, avec ses applications à la Géométrie ;* par M. Norzewski Roch. Paris, 1852 ; in-8°, 60 pages ; deux planches lithographiées. (Se trouve chez Bachelier.)

Chez les Grecs et jusque dans le moyen âge, on s'est occupé des propriétés arithmétiques et géométriques de la proportion harmonique. Ces propriétés sont devenues la base de cette belle géométrie segmentaire qui est si cultivée de nos jours, et que l'ignorance prétentieuse veut repousser de l'enseignement. Il faut donc savoir gré à M. Roch de résister à cette répulsion vandale, et de chercher, au contraire, à répandre la théorie proscrite. L'auteur pose la proportion

$$a : b :: c : a + b + c;$$

c'est la proportion *harmonique*, qui devient continue lorsque

$$b = c \quad \text{et alors} \quad b = a\left(1 + \sqrt{2}\right).$$

Mais, généralement, on peut supposer $b < c$. L'auteur se sert des dénominations suivantes :

$$\frac{b}{c} = \text{rapport normal},$$

$$\frac{c}{a} = \text{rapport harmonique},$$

$$\frac{c}{b} = \text{rapport moyen}.$$

Les relations entre ces trois rapports donnent lieu à vingt-neuf théorèmes et à treize problèmes; la progression fournit sept théorèmes. Les applications géométriques concernent les transversales, puis des systèmes de droites et aussi les circonférences. Cette nouvelle Théorie ne diffère de la théorie très-ancienne que par l'emploi du procédé algorithmique. L'exposition paraîtra peut-être peu expéditive. La géométrie segmentaire ne roulant que sur des *produits de rapports*, il est à regretter qu'on n'ait pas parlé des produits *anharmoniques* et des signes

de ces produits; signes dont la considération a été mise en relief par le célèbre professeur de la Sorbonne, dans le cours dont la publication est si généralement, si vivement désirée.

6. *Maîtrises ès arts.* L'année d'examen pour l'École Polytechnique doit être entièrement et uniquement consacrée aux sciences exactes, aux sciences physiques et aux exercices graphiques. C'est trop de faire subir en même temps aux jeunes gens des examens sur l'histoire, les langues, la géographie, la cosmographie; c'est trop de beaucoup. Cette accumulation de travaux peut avoir des suites funestes pour la santé et même pour l'intelligence. On devrait établir un grade universitaire différent du baccalauréat. Cette maîtrise ès arts ne constaterait que les connaissances littéraires, linguistiques, géographiques, etc., suffisantes pour des candidats qui se destinent aux écoles du Gouvernement. L'examen pour l'obtention de ce grade aurait lieu une année ou deux avant l'examen d'admission aux écoles. Ce moyen rendrait l'instruction plus solide et soulagerait les élèves et les examinateurs. En résumé, séparez les examens et ne les accumulez pas. Prenez en considération les connaissances linguistiques, mais n'y affectez pas des *coefficients*. Napoléon le Grand, n'ayant pas eu d'aptitude pour les langues, n'aurait été admis dans aucune de vos écoles. Et, à tout prendre, l'équitation, l'escrime, etc., sont plus utiles à un militaire que de savoir expliquer Schiller. On ne saurait trop insister sur la parfaite connaissance de la langue nationale. Un idiome étranger est un accessoire qu'il faut apprécier, mais laisser hors de la balance.

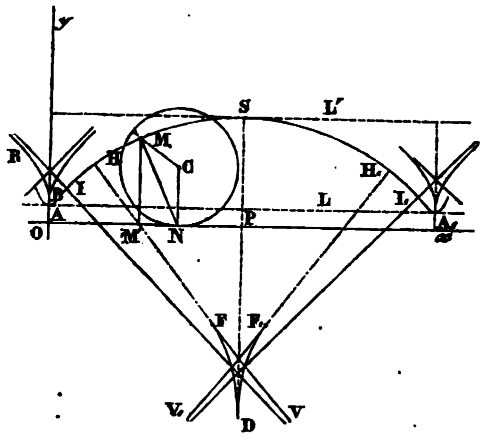
CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Cycloïdes allongées et raccourcies. — Tangentes. — Normales. — Rayons de courbure. — Développées. — Arc. — Segment.

I. *Cycloïdes allongées.* — Soient R le rayon du cercle, G le point intérieur qui engendre la cycloïde, et a la distance de ce point au centre C (*).



L'axe des x sera la droite fixe sur laquelle le cercle roule, et l'axe des y la perpendiculaire menée à cette

(*) Cet article, de même que le suivant, jusqu'aux rayons de courbure, sera facilement compris par les élèves de mathématiques spéciales. La figure se rapporte au cas de $n < 2$.

droite par la position A de G, où il en est à la distance minimum $R - a$.

Il est évident, à priori, que la courbe est indéfinie et comprise entre les droites L et L′, dont les équations sont $y = R \mp a$; et que, le cercle roulant dans le sens des x positives, G s'éloigne de L en partant de A, atteint L en S où $x = \pi R$, puis revient sur L en A_1, après avoir décrit SA_1 symétrique de SA par rapport à l'ordonnée SP.

$M(x, y)$ étant un point quelconque de l'arc ASA_1, qu'il suffit d'étudier, et N le point de contact correspondant du cercle avec l'axe des x; si l'on désigne par φ l'angle MCN (qui peut s'étendre de o à 2π), on a les équations

$$(1) \qquad x = R\varphi - a \sin\varphi \quad \text{et} \quad y = R - a\cos\varphi.$$

D'après ces équations, $y = R - a$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, auxquelles répondent $x = 0$ et $x = 2\pi R$; le maximum de y est $y = R + a$ répondant à $\varphi = \pi$ et $x = \pi R$; enfin, x a des valeurs équi-différentes de πR, et y des valeurs égales entre elles pour des valeurs de φ équi-différentes de π.

Tangentes. — Les équations (1) donnent

$$D_\varphi x = R - a\cos\varphi \quad \text{et} \quad D_\varphi y = a \sin\varphi.$$

On a donc, en désignant par y' la dérivée $D_x y$, et posant $R = an$,

$$(2) \qquad y' = \frac{\sin\varphi}{n - \cos\varphi},$$

d'où

$$D_\varphi y' = \frac{n\cos\varphi - 1}{(n - \cos\varphi)^2}.$$

Soit φ_1 le plus petit arc positif dont le cosinus soit

$\frac{1}{n}$ ou $\frac{a}{R}$, et soit I le point de AS correspondant à $\varphi = \varphi_1$, pour lequel $x = R\varphi_1 - a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$ et $y = R - a \cdot \frac{a}{R}$. On voit que, φ croissant de o à φ_1, $D_\varphi y'$ est positive et y' croissant de o à $\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$; et que, φ continuant de croître jusqu'à π, $D_\varphi y'$ est négative et y' décroissant jusqu'à zéro. Donc, les tangentes en A et S sont parallèles à Ox, l'arc AI est convexe et l'arc IS concave vers Ox, et il y a une inflexion en I.

Normales. — La normale en chaque point M passe par le point de contact correspondant du cercle et de l'axe des x, car l'abscisse, à l'origine de la normale, est

$$x + yy' = R\varphi,$$

d'après les équations (1) et (2).

Cette propriété, qui est commune à toutes les courbes engendrées comme les cycloïdes (*Nouvelles Annales*, tome X, page 212), conduit immédiatement à l'équation différentielle des cycloïdes allongées,

$$dx = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - (R - y)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$x = R \arccos \frac{R - y}{a} \mp \sqrt{a^2 - (R - y)^2}.$$

Rayon de courbure. — Le rayon de courbure en M étant désigné par ρ, en remarquant que $D_x y' = \frac{D_\varphi y'}{D_\varphi x}$, on a

$$(3) \qquad \rho = \pm \frac{R}{n} \frac{(1 + n^2 - 2n\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{n\cos\varphi - 1}$$

(il faut prendre le signe + pour les arcs convexes vers

Ox, et le signe — pour les arcs concaves, si l'on veut que ρ soit positif). ρ est évidemment minimum en A où $\varphi = 0$ et $\rho = \frac{(R-a)^2}{a}$, et il est infini en I où $n \cos\varphi = 1$.

L'équation (3) donne

$$D_\varphi \rho = \pm R \sin\varphi (n\cos\varphi + n^2 - 2) \frac{(1 + n^2 - 2n\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - n\cos\varphi)^2}.$$

Sur AI, $D_\varphi \rho$ est positive (il faut prendre le signe +). Si $n > 2$, $D_\varphi \rho$ est négative de I en S où elle change de signe à cause du facteur $\sin\varphi$ (il faut prendre le signe —); donc ρ est *minimum* au point S. Si $n < 2$, $D_\varphi \rho$, d'abord négative quand φ croît à partir de φ_1, change de signe lorsque φ passe par la valeur φ_2, qui est déterminée par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{2 - n^2}{n},$$

et reste positive jusqu'à ce que φ atteigne la valeur π, puis devient ensuite négative; donc ρ est *minimum* en un point H de IS, dont les coordonnées sont

$$x = R\varphi_2 - a\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad y = 2\left(R - a\frac{a}{R}\right)$$

(double de l'ordonnée du point I), et *maximum* en S.

Développées. — Il résulte de ce qui précède, que la développée de l'arc ASA_1 a des branches infinies dont les asymptotes sont les normales aux points I et I_1 (symétriques de I par rapport à SP), un point de rebroussement sur le prolongement de SP, et, quand $n < 2$, deux autres points de rebroussement qui répondent à H et à H_1 (symétrique de H par rapport à SP).

D'après les équations (1) et (2), celle de la normale en M est

$$(4) \qquad y_1 \sin\varphi + x_1(n - \cos\varphi) - R\varphi(n - \cos\varphi) = 0,$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées courantes. Par l'élimination de φ entre cette équation, et

(5) $y_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi - R(n + \varphi \sin\varphi - \cos\varphi) = 0,$

que l'on forme en égalant à zéro la dérivée du premier membre par rapport à φ, on aurait l'équation de la développée. Mais cette équation est très-compliquée, et il serait préférable de rechercher la forme de la développée au moyen des valeurs de x_1 et y_1 qu'on tire des deux équations (4) et (5),

$$x_1 = R\left(\varphi - \frac{n - \cos\varphi}{n \cos\varphi - 1} \sin\varphi\right),$$

et

$$y_1 = R\frac{(n - \cos\varphi)^2}{n \cos\varphi - 1}.$$

Ces valeurs donnent, pour les points de rebroussement B et D, $y = R.\frac{R-a}{a}$, et $y = R.\frac{R+a}{a}$, qu'il est facile de construire; et, dans le cas de $n < 2$, pour le point de rebroussement C, $x = R\varphi_2 + 2a\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a}\right)^2}$, $y = -4\left(R - a.\frac{a}{R}\right)$, dont la comparaison avec les coordonnées de H montre qu'en ce point le rayon de courbure est triple de la normale.

On voit, du reste, par la discussion même de la cycloïde, que la développée a : 1° une branche infinie BR, concave vers Ox, répondant à AI; 2° une autre branche infinie FV, également concave vers Ox, répondant à IH seulement si $n < 2$, et à IS si $n \geqq 2$; 3° lorsque $n < 2$, un arc FD, convexe vers Ox, qui répond à HS, et disparait quand $n \geqq 2$. Enfin, on remarquera que si n variait depuis 2 jusqu'à 1, les points F et F_1, d'abord réunis sur SP avec D, s'écarteraient de SP et tendraient vers A et

A_1, sur Ox, en même temps que les asymptotes s'inclineraient sur Ox et tendraient à s'y confondre.

Arc. — On a, en désignant par s l'arc AM,

$$ds = a\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos\varphi}.d\varphi;$$

d'où, en posant $\varphi = \pi - 2\psi$,

$$ds = -2a(1+n)\sqrt{1 - \frac{4n}{(n+1)^2}\sin^2\psi}.d\psi.$$

On voit, d'après cette dernière expression de ds, que la rectification de la cycloïde dont il s'agit se ramène à celle d'une ellipse dont les demi-axes sont $2a(n+1)$ et $2a(n-1)$. En intégrant depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à ψ, qui répondent à $\varphi = 0$ et à φ, il vient, par une notation connue,

$$s = 2a(1+n)\left[E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right) - E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}, \psi\right)\right];$$

et conséquemment l'arc AS est exprimé par

$$2a(1+n).E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right).$$

Segment. — Si l'on désigne par A le segment OAMM′, on a

$$dA = a^2(n - \cos\varphi)^2\, d\varphi;$$

et, en intégrant de manière que $\varphi = 0$ donne $A = 0$, il vient

$$A = a^2\left[\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)\varphi - 2n\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right],$$

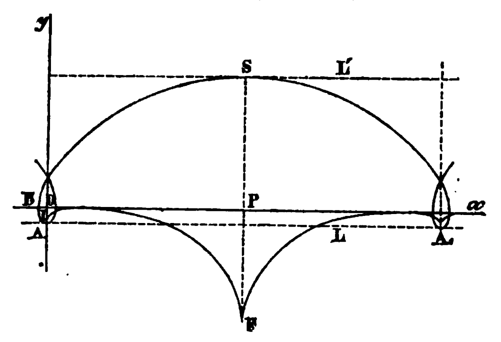
d'où il suit que l'aire $OASA_1O_1$ a pour mesure

$$2\pi a^2\left(n^2 + \frac{1}{2}\right) = 2\pi R^2 + \pi a^2.$$

II. — *Cycloïdes raccourcies.* — Le point G est hors du cercle C, de sorte que $n < 1$. Toutes celles des équations

précédentes qui ne supposent pas $n > 1$, s'appliquent; et nous en déduirons brièvement les principaux caractères de ces courbes, qui sont encore comprises entre les parallèles à Ox dont les équations sont

$$y = \mathrm{R} \mp a \,(\mathrm{L} \text{ et } \mathrm{L}').$$



Soient φ' et φ'' les valeurs de φ, comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$, qui rendent nulles y et x, c'est-à-dire qui satisfont aux équations $n - \cos\varphi = 0$ et $n\varphi - \sin\varphi = 0$, et dont la première φ' est moindre que la seconde φ'', puisque $n - \cos\varphi$ est la dérivée de $n\varphi - \sin\varphi$ (théorème de Rolle).

Lorsque φ croît de o à φ', x décroît de o à $-a(\sin\varphi' - n\varphi')$, car $\mathrm{D}_\varphi x < 0$; y croît de $-(a - \mathrm{R})$ à o, car $\mathrm{D}_\varphi y > 0$; et y' décroît de o à $-\infty$, car $\mathrm{D}_\varphi y' < 0$. On a donc l'arc AB touché en A par la droite L, en B par une parallèle à Oy, et concave vers les deux axes.

De $\varphi = \varphi'$ à $\varphi = \pi$, x est d'abord négative jusqu'à $\varphi = \varphi''$, ensuite positive, et toujours croissante, car $\mathrm{D}_\varphi x > 0$; y croît de o à $\mathrm{R} + a$, car $\mathrm{D}_\varphi y > 0$; et y' décroît de l'∞ à o, car $\mathrm{D}_\varphi y' < 0$. On a donc l'arc BS qui coupe Oy en D, dont l'ordonnée est $\mathrm{R} - a\cos\varphi''$, touche L' en S, et est concave vers Ox. φ continuant de croître jusqu'à 2π, on a $\mathrm{SB}_1\mathrm{A}_1$ symétrique de SBA, et la courbe comprend une infinité de parties telles que ASA_1.

Le rayon de courbure est encore évidemment minimum en A, où sa valeur est $\frac{(a-\mathrm{R})^2}{a}$; et il est maximum en S, où sa valeur est $\frac{(a+\mathrm{R})^2}{a}$, car $\mathrm{D}_\varphi\rho$ passe du positif au négatif quand φ franchit la valeur π (c'est le signe — qu'il faut prendre devant l'expression de ρ).

La développée a deux points de rebroussement I et F correspondant à A et S; elle touche l'axe des x en un point correspondant à B, et dont l'abscisse est $x_1 = \mathrm{R}\varphi'$, ainsi qu'en un point symétrique de celui-là par rapport à SP; et elle est partout convexe vers Ox.

Enfin, on remarquera que l'expression de A fournit, par exemple, l'aire de OAB + OBC + OCMM', le point M répondant à la valeur que l'on donne à φ.

Note. M. Ch. Forestier, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Brest, a envoyé aussi une très-bonne et instructive solution de cette question. L'insertion ferait double emploi ou interromprait la suite des travaux que nous devons à l'obligeance de M. Dieu, professeur à Dijon, qui vient d'être nommé professeur à la Faculté de Grenoble.

Tm.

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

Par M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer le mouvement d'une sphère pesante, homogène, sur un plan horizontal, en ayant égard au frottement, et en supposant que ce mouvement résulte de certaines vitesses initiales de translation et de rotation imprimées à la sphère d'une manière quelconque.

Nous prendrons le rayon de la sphère pour unité de

longueur. Sa masse sera désignée par m ; et le plan horizontal sur lequel elle roule sera celui des $\widehat{xy}$.

Soient, à la fin de la durée t comptée depuis le commencement du mouvement :

x, y les deux coordonnées du centre M de la sphère qui sont variables (le z est constamment égal à 1) ;

C le point de la sphère qui est sur le plan $\widehat{xy}$;

u, v les composantes parallèles aux axes des x et des y de la vitesse de M, dont la direction est parallèle à $\widehat{xy}$;

MA l'axe instantané de rotation, et α, β, γ les angles qui déterminent sa direction ;

ω la vitesse angulaire autour de MA, et p, q, r ses composantes autour des parallèles menées de M aux trois axes.

La vitesse absolue de C est la résultante de la vitesse relative de ce point autour de MA, dirigée suivant la partie CD de la trace du plan CB, perpendiculaire à MA, sur $\widehat{xy}$, et de la vitesse du centre transportée au point C. Si cette vitesse absolue n'est pas nulle, à l'instant que l'on considère, la sphère glisse en roulant sur $\widehat{xy}$, et le frottement fait varier le mouvement ; tandis que si cette vitesse est nulle, la sphère roule sans glisser, il n'y a pas de frottement, et le mouvement ne varie pas. Nous supposerons d'abord qu'il y a un frottement, dont nous désignerons par mX, mY les deux composantes parallèles aux axes des x et des y.

Les équations du mouvement du centre M sont

(1) $$\frac{du}{dt} = \mathrm{X}, \quad \frac{dv}{dt} = \mathrm{Y},$$

car le poids de la sphère et la résistance du plan $\widehat{xy}$ se

détruisent; et celles du mouvement de rotation autour de MA sont

(2) $$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{2}{5}\frac{dq}{dt} = -X, \quad \frac{2}{5}\frac{dp}{dt} = Y,$$

car les produits de $\frac{dr}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dp}{dt}$, par le moment d'inertie $\frac{2}{5}m$ de la sphère autour d'un diamètre, sont les moments des couples dus aux composantes de la rotation autour des parallèles menées de M aux axes des coordonnées, et les moments correspondants de la force de frottement appliquée au point C sont o, $-mX$ et mY.

Les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad -\frac{dq}{dt} = \frac{5}{2}\frac{du}{dt}, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{5}{2}\frac{dv}{dt};$$

et, en intégrant depuis $t = 0$, on a

(3) $$\begin{cases} r - r_0 = 0, \quad -(q - q_0) = \frac{5}{2}(u - u_0), \\ p - p_0 = \frac{5}{2}(v - v_0), \end{cases}$$

u_0, v_0, etc., étant les valeurs initiales de u, v, etc....

Il résulte de ces trois dernières équations que : *Si le mouvement de* M *était rectiligne et uniforme, la sphère tournerait avec une vitesse constante autour d'un de ces diamètres, pendant que ce diamètre se mouvrait parallèlement à une certaine direction.* En effet, on aurait par hypothèse $u = u_0$, $v = v_0$; par suite, en vertu des équations (3), $q = q_0$, $p = p_0$, et l'on a toujours $r = r_0$.

On voit facilement que les composantes, parallèles aux axes des x et des y, de la vitesse relative de C autour de MA, sont $-q$ et p; celles de la vitesse absolue de ce point suivant les mêmes axes, sont donc, d'après ce qui a été

dit plus haut, $u - q$ et $v + p$. Or la direction du frottement est opposée à celle de cette vitesse; donc on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - q}{v + p},$$

ou bien, en remplaçant q et p par leurs valeurs tirées des équations (3),

$$\frac{X}{Y} = \frac{u - a}{v - b},$$

si l'on représente par a et b (pour simplifier) les constantes données

$$\frac{5 u_0 + 2 q_0}{7} \text{ et } \frac{5 v_0 - 2 p_0}{7}.$$

D'ailleurs, les équations (1) donnent

$$\frac{X}{Y} = \frac{du}{dv};$$

donc on a

$$\frac{du}{u - a} - \frac{dv}{v - b} = 0,$$

et, en intégrant depuis $t = 0$,

$$(4) \qquad \frac{u - a}{v - b} = \frac{u_0 - a}{v_0 - b} = \text{const.};$$

ou bien

$$\frac{X}{Y} = \text{const.}$$

Ainsi, *la direction du frottement est constante*. Quand la vitesse de C ne dépasse pas 4 mètres par seconde, le frottement ne dépend que de la pression (expériences de M. Morin); il est donc constant en grandeur et direction, et, par conséquent,

M *décrit, au moins pendant un certain temps, et en*

général, une parabole tangente à la direction de sa vitesse initiale.

f étant le coefficient du frottement et g la gravité, on a, d'après les équations précédentes,

$$(5) \qquad \frac{du}{dt} = -fg.\frac{u-a}{V}, \quad \frac{dv}{dt} = -fg.\frac{v-b}{V},$$

en posant $V = \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2}$ [$u-a$ et $v-b$ sont respectivement de mêmes signes que $u-q$ et $v+p$, par conséquent, de signes contraires à X et Y, et V doit être considérée comme positive].

D'après la première de ces équations, du et $u-a$ sont de signes contraires, de sorte que la composante u augmente ou diminue, suivant qu'elle est moindre que a ou plus grande que a; et, d'après la seconde, on peut en dire autant de v par rapport à b; u et v tendront donc respectivement vers a et b, et l'on aura en même temps

$$u = a, \quad v = b,$$

puisque $\frac{u-a}{v-b}$ est constant [équation (4)].

Par conséquent,

Le centre M, *après avoir décrit, en général, un arc de parabole, continuera de se mouvoir avec une vitesse constante suivant la tangente menée par l'extrémité de cet arc.*

V_0 désignant ce que devient V pour $u = u_0$ et $v = v_0$, il résulte de l'équation (4), que

$$\frac{u-a}{V} = \frac{u_0-a}{V_0} \quad \text{et} \quad \frac{v-b}{V} = \frac{v_0-b}{V_0},$$

et les équations (5) reviennent à

$$\frac{du}{dt} = -fg.\frac{u_0-a}{V_0}, \quad \frac{dv}{dt} = -fg.\frac{v_0-b}{V_0}.$$

En intégrant depuis $t = 0$, on a

(6) $$u = u_0 - fg.\frac{u_0 - a}{V_0}t,\quad v = v_0 - fg.\frac{v_0 - b}{V_0}t,$$

qui donnent pour t la même valeur quand on y fait $u = a$ et $v = b$,

$$t = \frac{V_0}{fg} = \frac{1}{fg}\sqrt{(u_0 - a)^2 + (v_0 - b)^2}.$$

Si cette équation donnait $t = 0$, le mouvement de M serait immédiatement rectiligne et uniforme; mais, en général, $V_0 > 0$, et ce sera lorsque t atteindra la valeur $\frac{V_0}{fg}$ que le mouvement de la sphère changera de nature, comme il vient d'être dit.

En remplaçant, dans les équations (6), u et v par $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, et intégrant de manière que $t = 0$ donne

$$x = 0,\quad y = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine le point où la sphère touche d'abord le plan $\widehat{xy}$, on a

(7) $$x = u_0 t - \frac{1}{2}fg\frac{u_0 - a}{V_0}t^2,\quad y = v_0 t - \frac{1}{2}gf\frac{v_0 - b}{V_0}t^2;$$

et, par l'élimination de t, il vient

(8) $$[(u_0 - a)y - (v_0 - b)x]^2 + \frac{V_0}{fg}(av_0 - bu_0)(u_0 y - v_0 x) = 0,$$

qui représente la parabole sur laquelle se trouve, jusqu'à $t = \frac{V_0}{fg}$, le point où la sphère touche $\widehat{xy}$. Pendant cette première partie du mouvement, on connaît: 1° les deux coordonnées de M, qui sont seules variables, par les équations (7); 2° les composantes u, v de la vitesse de M, par les équations (6); 3° les composantes p et q de la

vitesse angulaire autour de l'axe instantané, par les équations (3). La vitesse de M se déduit ensuite facilement de u et v en grandeur et direction, et l'on achève de déterminer le mouvement de la sphère sur elle-même par les formules

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r_0^2}, \quad \cos\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{r_0}{\omega}.$$

Mouvement rectiligne de M. Les coordonnées du point où la sphère touche $\widehat{xy}$, quand la nature du mouvement change, se déduisent des équations (7) en y faisant $t = \frac{V_0}{fg}$, et sont

$$x = \frac{(u_0 + a)V_0}{2fg}, \quad y = \frac{(v_0 + b)V_0}{2fg}.$$

Pour $t \overset{=}{>} \frac{V_0}{2g}$, on a

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a};$$

et en prenant l'intégrale de cette dernière équation, de manière qu'elle soit satisfaite par les précédentes valeurs de x et de y, il vient

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{(av_0 - bu_0)V_0}{2afg},$$

qui représente la droite sur laquelle se trouve le point dont il s'agit [on vérifie facilement qu'elle touche la parabole de l'équation (8)].

La vitesse de M, devenue constante, est représentée par $\sqrt{a^2 + b^2}$. On a, avec $r = r_0$, qui se rapporte aux deux

parties du mouvement,

$$p = \frac{2p_0 - 5v_0}{7}, \quad q = \frac{2q_0 + 5u_0}{7},$$

d'après les deux dernières équations (3) ; et l'on conclut facilement de ces valeurs constantes, celles de ω et de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, par lesquelles le mouvement de la sphère sur elle-même est déterminé dans la seconde partie.

Enfin, lorsque $u_0 = a$, $v_0 = b$, les trois dernières équations, qui s'appliquent depuis le commencement du mouvement, deviennent

$$y = \frac{v_0}{u_0} x, \quad p = -v_0, \quad q = u_0.$$

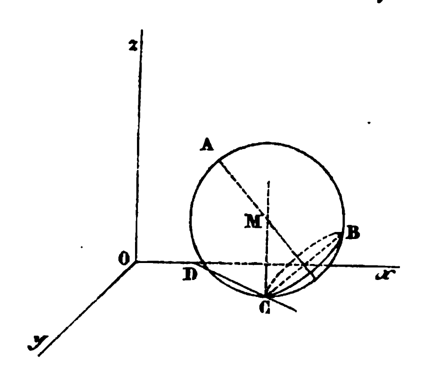
Remarques. 1°. L'axe instantané de rotation restera toujours parallèle à $\widehat{xy}$, s'il est d'abord parallèle à ce plan, car l'hypothèse $r_0 = 0$ entraîne que $r = 0$ [équation (3)];

2°. Le mouvement de M sera tout d'abord rectiligne, non-seulement si l'on a $u_0 = a$, $v_0 = b$, mais encore si l'on a $\frac{a}{u_0} = \frac{b}{v_0} = n$, n étant un nombre quelconque, ce qui renferme le cas précédent pour lequel $n = 1$. En effet, les coefficients de t^2, dans les équations (7), deviennent ainsi proportionnels à ceux de t, et l'élimination de t conduit à $u_0 y - v_0 x = 0$, que l'on peut aussi déduire de l'équation (8).

Ce mouvement reste uniformément accéléré jusqu'à ce que $t = \frac{1-n}{fg}\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$; puis, passé l'instant marqué par cette valeur de t, il devient uniforme et sa vitesse est $n\sqrt{u_0^2 + v_0^2}$.

Le cas de $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, c'est-à-dire dans lequel l'axe

instantané de rotation est d'abord vertical, se trouve compris dans le précédent, et il répond à $n = \frac{5}{7}$ (*).



SOLUTION DE LA QUESTION 181 (STREBOR)

(voir t. VII, p. 187);

PAR M. TH. LOXHAY,
Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

L'énoncé doit être rectifié de la manière suivante : Démontrer la formule

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}\, d\varphi \\ \displaystyle = \log\cos a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}. \end{array} \right.$$

(*) On peut voir, pour ce problème, le Mémoire de J.-A. Euler, intitulé : *Recherches des mouvements d'un globe sur un plan horizontal* (Histoire de l'Académie de Berlin, année 1758, pages 284 à 353), et *la Théorie des effets du jeu de billard*, par G. Coriolis (chap. Ier, pages 51 à 77).

Pour démontrer cette formule, considérons seulement le premier membre, et posons

(2) $$(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)(1 - \sin^2 a \sin^2 \omega) = \cos^2 a;$$

d'où

$$\sin^2 \omega = \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}}.$$

Pour $\varphi = 0$, on obtient $\omega = \frac{\pi}{2}$, et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\omega = 0$; de sorte qu'après la substitution de φ en ω, dans le premier membre de l'équation (1), l'intégrale sera encore prise entre les mêmes limites, pourvu que l'on en change le signe. De la formule (2) on tire

$$\sin^2 \varphi = \frac{\cos^2 \omega}{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega};$$

d'où

$$d\varphi = - \frac{\cos a\, d\omega}{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega}.$$

Remplaçant maintenant, dans le premier membre de la formule (1), les quantités en φ en fonction de celles en ω, on trouve, en simplifiant et en changeant le signe du second membre,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\cos^2 a}{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \omega}}.$$

Mais on peut, sous le signe de l'intégrale définie, changer ω en une autre quantité variable sans modifier le résultat; changeons-y ω en φ et simplifions, on en

tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}} d\varphi$$

$$= 2\log\cos a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}} d\varphi\right];$$

d'où, enfin,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}} d\varphi = \log\cos a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}}.$$

NOTE SUR LA DIVISION ABRÉGÉE;

PAR M. E. LIONNET (*),
Professeur au lycée Louis-le-Grand.

I. *Trouver un ou plusieurs chiffres du quotient d'une division dans laquelle le dividende et le diviseur, entiers ou décimaux, contiennent un nombre de chiffres limité ou illimité.*

Fourier a résolu ce problème d'une manière ingénieuse en donnant, sans démonstration, une règle que nous allons reproduire succinctement, et avec une modification qui a pour objet d'en faire disparaître une inexactitude.

Faisant abstraction de la virgule dans les nombres proposés, on marque un ou plusieurs chiffres sur la gauche du diviseur, et l'on convient d'appeler diviseur désigné *le nombre formé par ces chiffres. On divise le dividende par le diviseur désigné, en observant la même*

(*) Par une méthode *empirique*, M. Koralek trouve que le problème de M. Lionnet (p. 115) n'a que quatre-vingt-douze solutions, dont douze seulement sont *distinctes*.

règle que pour la division ordinaire des nombres entiers. Toutefois, avant d'employer un dividende partiel, on lui fait subir une correction qui consiste à le diminuer de la somme des produits qu'on obtient en multipliant le premier des chiffres placés à la droite du diviseur désigné par le dernier des chiffres obtenus au quotient, le second par l'avant-dernier, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé comme multiplicateur le premier chiffre du quotient. Pour qu'un chiffre mis au quotient soit bon, il suffit que le reste correspondant soit au moins égal à la somme de tous les chiffres obtenus au quotient. Lorsque cette condition n'est pas remplie, le chiffre du quotient étant douteux, on le supprime avec le reste correspondant; on marque un chiffre de plus au diviseur désigné, et l'on abaisse à la droite du dernier dividende partiel corrigé le premier des chiffres non encore employés au dividende proposé, ce qui donne un nouveau dividende partiel auquel on fait subir la correction indiquée plus haut, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu au quotient le nombre de chiffres demandé.

246,83579246...	$\overline{97}$,5386457...
194	2,53
52,8	
1,0	
51,8	
48,5	
3,33	
0,31	
3,02	
2,91	
0,11	

Pour fixer les idées et simplifier la démonstration de cette règle, nous supposerons que le diviseur est un

nombre décimal dont la partie entière 97 forme le *diviseur désigné,* que le dividende est un nombre décimal dont la partie entière 246 contient le diviseur désigné au moins une fois et moins de dix fois, et nous mettrons en évidence les produits qui doivent être retranchés successivement du dividende. Enfin, nous supposerons qu'en observant la règle précédente, on ait obtenu les trois premiers chiffres du quotient qui, dans l'exemple proposé, sera 2,53.... On voit alors qu'il suffira de démontrer que 2,53 est le plus grand multiple de 0,01 contenu dans le quotient, ou, autrement, que le produit du diviseur proposé d par 2,53 est contenu dans le dividende proposé D, et que le produit $d \times 2,54$ excède D.

Démonstration. Pour obtenir le reste 0,11 par la règle précédente, on a retranché de D :

1°. Le produit $97,53 \times 2$, en négligeant le produit

$$0,008\ldots \times 2 < 0,02;$$

2°. Le produit $97,5 \times 0,5$, en négligeant le produit

$$0,038\ldots \times 0,5 < 0,05;$$

3°. Le produit $97 \times 0,03$, en négligeant le produit

$$0,53\ldots \times 0,03 < 0,03.$$

Donc, en désignant par P la somme des produits ainsi retranchés de D, on aura

$$D = P + 0,1157\ldots, \quad d \times 2,53 > P$$

et

$$d \times 2,53 < P + (0,02 + 0,05 + 0,03).$$

Mais on a, par hypothèse,

$$2 + 5 + 3 = \text{ ou } < 11,$$

ou, autrement,

$$0,02 + 0,05 + 0,03 < 0,11;$$

donc $d \times 2,53$ est contenu dans D. De plus, le produit

$$d \times 2,54 = d \times 2,53 + d \times 0,01;$$

or

$$d \times 2{,}53 > P, \quad d \times 0{,}01 = 0{,}97\ldots > 0{,}1157\ldots,$$

puisque le diviseur désigné 97 excède le reste 11 de la dernière division partielle; donc enfin le produit $d \times 2{,}54$ excède D.

Remarque. La démonstration précédente s'applique au cas particulier où l'un des restes est moindre que la somme des chiffres du quotient qui lui correspond. Alors on suppose que le dernier diviseur désigné est la partie entière du diviseur *d*.

II. On voit, par ce qui précède, qu'étant donnés deux nombres entiers ou décimaux contenant un nombre limité ou illimité de chiffres, on pourra toujours trouver le quotient de leur division avec autant de chiffres exacts qu'on voudra, sans avoir égard à la virgule dans aucun des nombres proposés. Il suffira, dans chaque cas particulier, de commencer par déterminer l'ordre des plus grandes unités du quotient; ensuite on multipliera ou l'on divisera le nombre entier obtenu par une puissance de 10, telle que le premier chiffre significatif à gauche exprime des unités de cet ordre. Mais, dans un grand nombre d'applications, on a besoin de connaître, à moins d'une unité entière ou décimale d'un ordre déterminé, une valeur approchée du quotient d'une division dans laquelle on ne donne que le premier chiffre à gauche du dividende et du diviseur, ou seulement l'ordre des unités exprimées par ces deux chiffres; alors il importe de savoir combien il suffit de calculer de chiffres exacts au dividende et au diviseur, pour qu'en leur appliquant la règle précédente, on obtienne le quotient avec le degré d'approximation demandé. Mais, avant de résoudre ce problème, nous démontrerons le principe suivant : *Pour obtenir, à moins d'une unité, le quotient d'une division dans laquelle la partie entière du*

diviseur excède celle du quotient, il suffit de diviser la partie entière du dividende par celle du diviseur.

Soient $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$ le dividende, le diviseur et le quotient dont a, b, c désignent les parties entières. Il s'agit de prouver que la partie entière du quotient $a:b$ est égale à c ou à $c+1$.

1°. La partie entière du quotient $a:b$ est au moins égale à c; car elle est la même que celle du quotient $a+\alpha:b$, lequel excède $c+\gamma$;

2°. La partie entière du quotient $a:b$ n'excède pas $c+1$; car s'il en était ainsi, elle serait au moins égale à $c+2$, et l'on aurait

$$a = \text{ou} > b\times(c+2),$$

et, par suite,

$$a+\alpha > b\times(c+1)+b.$$

Mais, par hypothèse, le nombre b est au moins égal à $c+1$, et, par conséquent, plus grand que $(c+1)\times\beta$; donc, en remplaçant b par $(c+1)\times\beta$, on aurait, à plus forte raison,

$$a+\alpha > (c+1)\times(b+\beta),$$

d'où il résulterait, contrairement à la supposition, que la partie entière du quotient $a+\alpha:b+\beta$ serait au moins égale à $c+1$; donc la partie entière du quotient $a:b$ ne peut excéder $c+1$.

III. Soit proposé de trouver, à moins de 0,01, le quotient $\pi:e$ de la division du rapport de la circonférence au diamètre, par la base des logarithmes népériens. La longueur de la circonférence étant comprise entre les périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit, on reconnait immédiatement que la partie entière de π est égale à 3; le nombre e étant la limite de la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\ldots,$$

on voit de même que la partie entière de e est égale à 2. De plus, pour trouver le quotient $\pi : e$ à moins de 0,01, il suffit de chercher le quotient $100\,\pi : e$ à moins d'une unité, puis de diviser ce dernier quotient par 100. Or le dividende $100\,\pi$ est compris entre 300 et 400, le diviseur e entre 2 et 3, et, par suite, le quotient entre 100 et 200; donc, si l'on multiplie le dividende et le diviseur par 100, on sera conduit à chercher une valeur approchée, à moins d'une unité, du quotient $10000\,\pi : 100\,e$ dans lequel la partie entière du diviseur excède celle du quotient. On voit qu'il suffira de calculer les quatre premières décimales de π, les deux premières de e, puis de diviser la partie entière 31415 de $10000\,\pi$ par la partie entière 271 de $100\,e$, ce qui donne 115 :

$$\begin{array}{r|l} 31415 & 271 \\ \hline 43 & 115 \\ 160 & \\ 25 & \end{array}$$

Enfin, divisant 115 par 100, on obtient le quotient demandé 1,15.

En général, *pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale, le quotient d'une division dans laquelle on donne les premiers chiffres à gauche du dividende et du diviseur, ou seulement l'ordre des unités exprimées par ces deux chiffres, on commence par multiplier le dividende ou le diviseur par une puissance de* 10, *telle que la question soit ramenée à trouver un quotient, à moins d'une unité; ensuite on détermine le premier chiffre à gauche du quotient ou seulement l'ordre de ses plus grandes unités, et l'on multiplie ou l'on divise le dividende et le diviseur par une même puissance de* 10, *telle que la partie entière du nouveau diviseur excède le moins possible celle du quotient; on calcule alors les chiffres qui*

forment la partie entière du dividende et celle du diviseur, puis on divise la partie entière du dividende par celle du diviseur, ce qui donne un nombre entier qu'on multiplie ou qu'on divise par la puissance de 10, par laquelle on a d'abord multiplié le diviseur ou le dividende proposé.

SOLUTION DE LA QUESTION 136

(voir t. V, p. 672);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
Du petit séminaire d'Iseure.

Construire le quadrilatère dont on connait : 1° une diagonale; 2° les angles qui ont leurs sommets aux extrémités de cette diagonale; 3° les projections des deux autres sommets sur cette diagonale. Discuter le cas particulier où les angles sont droits. (PIOBERT.)

1. Soient b et b', c et c' les segments additifs ou soustractifs de la diagonale AD, déterminés respectivement par les projections B' et C' des sommets opposés B et C. Soient α et α' les angles donnés, β et β' les parties de ces angles situées du même côté de la diagonale que le sommet B. Ce sommet une fois déterminé, le quadrilatère se résoudra sans difficulté. Or on a

$$(1) \quad \begin{cases} BB' = b \tan\beta = b' \tan\beta', \\ CC' = c \tan(\alpha - \beta) = c' \tan(\alpha' - \beta'), \end{cases}$$

ou

$$(2) \quad \frac{c(\tan\alpha - \tan\beta)}{1 + \tan\alpha \tan\beta} = \frac{c'(\tan\alpha' - \tan\beta')}{1 + \tan\alpha' \tan\beta'}.$$

Posons

$$\tan\alpha = m, \quad \tan\alpha' = n, \quad \tan\beta = x, \quad \tan\beta' = y;$$

l'équation (1) donne

$$y = \frac{b}{b'}x,$$

et l'équation (2) devient

$$(3)\quad c(m-x)(b'+bnx)=c'(b'n-bx)(1+mx);$$

d'où

$$(bx)^2-\frac{mn(b'c'-bc)+b'c-bc'}{mc'-nc}(bx)+bb'\frac{(mc-nc')}{mc'-nc}=0.$$

Ainsi le problème admet, en général, deux solutions. Avant de les construire, examinons le cas où les deux angles donnés seraient droits. On aurait

$$m=n=\infty.$$

2. L'équation (3), divisée par mn, peut s'écrire

$$c\left(1-\frac{x}{m}\right)\left(\frac{b'}{n}+bx\right)=c'\left(b'-\frac{bx}{n}\right)\left(\frac{1}{m}+x\right),$$

et, dans ce cas, elle se réduit à

$$bcx=b'c'x.$$

Si l'on n'a pas $bc=b'c'$ on doit faire $x=0$; alors le problème n'admet pas de solution. Si l'on a $bc=b'c'$, la valeur de x est indéterminée; mais, de cette égalité, on déduit

$$\frac{b+b'}{b}=\frac{c'+c}{c'}.$$

Or

$$b+b'=c'+c=\mathrm{AD},$$

donc

$$b=c'\quad\text{et}\quad b'=c;$$

les deux projections données sont à égales distances du milieu de la diagonale.

Ainsi le problème est impossible, si les projections données ne sont pas à égales distances du milieu de la diagonale. Et si cette condition est vérifiée, le problème admet une infinité de solutions. Ces conclusions découlent aussi des deux théorèmes suivants :

1°. *Les projections des extrémités d'un diamètre sur une corde quelconque sont à égales distances du milieu de cette corde ;*

2°. *Si deux droites* AD, BC *sont les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, et que les projections des extrémités de* BC *sur* AD *soient à égales distances du milieu de* AD, BC *est un diamètre du cercle circonscrit.*

3. *Résolution du quadrilatère.* Supposons que, par un changement convenable de signes, on ait amené les coefficients de l'équation (3), résolue par rapport à bx, à être positifs (abstraction faite du signe) et à ne renfermer que des lettres qui expriment des valeurs positives. Cette équation s'écrira sous l'une des formes comprises dans l'équation

$$(4) \qquad z^2 \pm pz \pm q = 0,$$

posant

$$z = bx, \quad p = \frac{mn(b'c' - bc) + b'c - bc'}{mc' - nc}, \quad q = bb'\frac{mc - nc'}{mc' - nc}.$$

On obtiendra facilement les logarithmes de p et de q, par les Tables de Gauss, puisqu'elles permettent de calculer immédiatement le logarithme de la somme ou de la différence de deux nombres dont on connaît les logarithmes. On pourra calculer par logarithmes les racines des équations (4), données par les formules suivantes

Pour l'équation

$$z^2 - pz + q = 0,$$

on a

$$z' = p\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi, \quad z'' = p\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

en posant

$$\sin^2\varphi = \frac{4q}{p^2}.$$

Pour l'équation

$$z^2 - pz - q = 0,$$

on a

$$z' = p\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{et} \quad (-z'') = p\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi},$$

l'angle φ étant déterminé par la relation

$$\text{tang}^2\varphi = \frac{4q}{p^2}.$$

Les deux équations qu'on obtient en changeant le signe de p dans celles qui précèdent, ont leurs racines égales à celles des équations dont elles dérivent, et de signes contraires.

Connaissant $\log z = \log(b \text{ tang } \beta)$, on déterminera l'angle β; l'équation (1) permettra de calculer l'angle β'; une simple soustraction donnera les angles $\alpha - \beta$ et $\alpha' - \beta'$. Ainsi, dans les deux triangles ABD, ACD, on connaîtra un côté et les deux angles adjacents. On pourra ainsi calculer, par les Tables, toutes les parties du quadrilatère demandé.

4. La *construction graphique* est facile, nous ne ferons qu'indiquer celle des coefficients p et q. On peut écrire

$$p = \frac{mc.n\left(\frac{b'c'}{c} - b\right) + c\left(b' - \frac{bc'}{c}\right)}{mc' - nc}.$$

Les produits mc, nc, etc., sont les tangentes d'arcs égaux en degrés à α et α', et décrits avec des rayons égaux aux multiplicateurs c, c', etc. On les construira aisément. Soient donc

$$h = mc,\quad h' = mc',\quad l = nc,\quad l' = nc',\quad \text{et}\quad k = n\left(\frac{b'c'}{c} - b\right);$$

on aura

$$p = \frac{hk - c\left(\frac{bc'}{c} - b'\right)}{h' - l} = \frac{c\left(\frac{hk}{c} - \frac{bc'}{c} + b'\right)}{h' - l},$$

et

$$q = bb' \frac{(h - l')}{h' - l}.$$

On obtient p par des quatrièmes proportionnelles, et q en construisant un carré qui soit au carré équivalent à bb' dans le rapport des deux longueurs $(h - l')$ et $(h' - l)$.

Note. M. Piobert, étant en 1817 élève à l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz, a employé les propriétés du quadrilatère inscriptible ABDC pour faire des levers à l'équerre d'arpenteur et au moyen d'une seule base. Considérant la diagonale AD, comme base, et marchant sur cette droite, on détermine avec l'instrument trois des quatre points A, C', B', D, et en outre le point O, intersection des deux diagonales AD et CC; on mesure les distances AC', AO, AB', et l'on trouve facilement

$$CC' = \sqrt{\frac{AC' . AB' . OC'}{OB'}} = \sqrt{\frac{DB' . DC' . OC'}{OB'}},$$

$$BB' = \sqrt{\frac{AC' . AB' . OB'}{OC'}} = \sqrt{\frac{DB' . DC' . OB'}{OC'}}.$$

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. JAUFROID,

Professeur de mathématiques au collége de Cette.

I. Le but de cet article est de traiter généralement la résolution en nombres entiers d'une équation du premier degré à un nombre quelconque d'inconnues.

Nous supposons démontré que l'équation

$$ax + by + c = 0,$$

a et b étant premiers entre eux, a toutes ses solutions en nombres entiers contenues dans les formules

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

α et β étant une de ces solutions.

II. Soit l'équation

$$ax + by + cz + dv + \ldots + mu + n = 0,$$

$a, b, c, d, \ldots, m$ n'ont pas de diviseur commun; soient, de plus, a et b premiers entre eux, je pose

$$(1) \qquad \begin{cases} x = Az + Bv + \ldots + Lu + M, \\ y = A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1, \end{cases}$$

et je dis qu'on peut trouver, pour $A, B, \ldots, L, M, A_1, B_1, \ldots, L_1, M_1$, des nombres entiers tels, que les valeurs des équations (1) satisfassent à l'équation proposée, indépendamment de toutes valeurs données à $z, v, \ldots, u$. En effet, la substitution donne

$$(aA + bA_1 + c)z + (aB + bB_1 + d)v + \ldots \\ + (aL + bL_1 + m)u + aM + bM_1 + n = 0,$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$aA + bA_1 + c = 0, \qquad aB + bB_1 + d = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$aL + bL_1 + m = 0, \qquad aM + bM_1 + n = 0;$$

mais a et b étant premiers entre eux, toutes ces équations sont solubles en nombres entiers. Concevons qu'on prenne une solution de chacune de ces équations, et que $A, B, \ldots, L, M, A_1, B_1, \ldots, L_1, M_1$ représentent les valeurs choisies, on aura l'identité suivante :

$$a(Az + Bv + \ldots + Lu + M) \\ + b(A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1) \\ + cz + dv + \ldots + mu + n = 0.$$

Par suite, l'équation proposée se met sous la forme

$$a(x - Az - Bv - \ldots - Lu - M) \\ + b(y - A_1 z - B_1 v - \ldots - L_1 u - M_1) = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = Az + Bv + \ldots + Lu + M - bt,$$
$$y = A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1 + at,$$

formules analogues à celles qu'on obtient pour le cas de deux inconnues, car on peut dire que les fonctions

$$x = Az + Bv + \ldots + Lu + M,$$
$$y = A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1,$$

sont une solution de l'équation proposée.

III. Supposons que a et b aient un plus grand commun diviseur δ, mais qu'ils soient premiers avec un des autres coefficients, c par exemple. Je pose

$$a = a_1\delta, \quad b = b_1\delta, \quad \text{et} \quad ax + by = \delta p;$$

d'où

(1) $$a_1 x + b_1 y = p.$$

L'équation proposée devient

$$\delta p + cz + dv + \ldots + mu + n = 0,$$

δ et c sont premiers entre eux; donc, d'après le § II, on aura

$$z = B_2 v + \ldots + L_2 u + M_2 + \delta t,$$
$$p = B_3 v + \ldots + L_3 u + M_3 - ct;$$

l'équation (1) devient alors

$$a_1 x + b_1 y - B_3 v - \ldots - L_3 u + ct - M_3 = 0;$$

et, comme a_1 et b_1 sont premiers entre eux, elle donne

(2) $$\begin{cases} x = Bv + \ldots + Lu + Mt + N - b_1 t', \\ y = B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1 t + N_1 + a_1 t', \\ z = B_2 v + \ldots + L_2 u + M_2 + \delta t. \end{cases}$$

Remarque. Si $\delta = 1$, on doit retomber sur le cas précédent; en effet, on peut résoudre par rapport à t la formule qui se rapporte à z, et porter cette valeur, qui est sous forme entière, dans celles de x et de y, qui prennent alors la forme indiquée précédemment. Les formules (2) comprennent donc les formules (1) du paragraphe précédent.

IV. Considérons encore le cas où a, b, c ont un plus grand commun diviseur δ, mais sont premiers avec d par exemple. Je pose

$$a = a_1\delta,\quad b = b_1\delta,\quad c = c_1\delta \quad \text{et} \quad ax + by + cz = \delta p.$$

Or

$$(1) \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z = p;$$

l'équation proposée devient

$$\delta p + dv + er + \ldots + mu + n = 0.$$

δ et d sont premiers entre eux, par conséquent on a

$$\begin{aligned} v &= C_3 r + \ldots + L_3 u + M_3 + \delta t,\\ p &= C_4 r + \ldots + L_4 u + M_4 - dt; \end{aligned}$$

alors l'équation (1) devient

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z - \ldots - L_4 u + dt - M_4 = 0,$$

et comme c_1 est premier avec a_1 et b_1, cette dernière équation tombe dans le cas précédent, et, en appelant δ' le plus grand commun diviseur de a_1 et b_1, elle donne, en posant $a_1 = a_2\delta'$, $b_1 = b_2\delta'$,

$$\begin{aligned} x &= C\,r + \ldots + L\,u + Mt + Nt' + P - b_2 t'',\\ y &= C_1 r + \ldots + L_1 u + M_1 t + N_1 t' + P_1 + a_2 t'',\\ z &= C_2 r + \ldots + L_2 u + M_2 t + \delta' t',\\ v &= C_3 r + \ldots + L_3 u + M_3 t + \delta t. \end{aligned}$$

Remarque. Si $\delta = 1$, les formules rentrent dans celles du § III. Si $\delta = 1$, $\delta' = 1$, elles rentrent dans celles du § II.

La marche du calcul est maintenant évidente, et l'on en déduit la généralisation suivante :

Si l'on choisit n inconnues dont les coefficients aient un plus grand commun diviseur δ, mais premiers avec le coefficient d'une des inconnues restantes, ces $n + 1$ inconnues s'expriment à l'aide de toutes les autres et de n indéterminées ; l'inconnue, dont le coefficient est pre-

mier avec ceux des n autres, ne contient qu'une de ces indéterminées multipliée par δ. Le nombre des indéterminées augmente d'une unité d'une formule à une autre, jusqu'aux deux dernières qui les contiennent toutes.

On pourra, si quelques-unes des quantités δ', etc., étaient égales à l'unité, diminuer si on le veut le nombre des formules d'après ce qui a été remarqué §§ III et IV.

Si l'on considère un système de valeurs pour z, v,..., u, les valeurs correspondantes de x et de y forment deux progressions arithmétiques ayant pour raisons les quotients des coefficients de y et de x par leur plus grand commun diviseur.

Si l'on considère un système de valeurs pour v,..., u, et si l'on divise a et b par le plus grand commun diviseur de a, b, c, ce qui donne a_1 et b_1, les valeurs de z correspondantes forment une progression arithmétique ayant pour raison le plus grand commun diviseur de a_1 et b_1, et ainsi de suite.

On conclut facilement de la théorie précédente, que si tous les coefficients, à l'exception de celui d'une seule inconnue, ont un plus grand commun diviseur δ, mais sont premiers avec celui de cette inconnue, les valeurs de celle-ci forment une progression arithmétique ayant pour raison δ.

Note. Ce problème, étendu à un nombre quelconque d'équations du premier degré, est traité avec rigueur et élégance dans un Mémoire inédit de M. Lebesgue, sur l'analyse indéterminée du premier degré, que le célèbre arithmologue a bien voulu nous communiquer. Ce Mémoire fait partie d'une Théorie générale des nombres.

La nature de cet ouvrage demanderait une souscription à laquelle le Gouvernement devrait prendre une forte part. Les encouragements sont à réserver pour les auteurs d'élite qui s'adressent à un petit nombre de lecteurs et pour lesquels il faut pourtant écrire, nonobstant les préoccupations du jour; c'est l'opinion de Vitruve :

Cum animadvertissem distentam civitatem publicis et privatis negotiis, paucis judicavi scribendum (in præfatione libri quinti *de Architectura*).

THÉORÈME DE PASCAL ET SES CONSÉQUENCES;

D'APRÈS MM. STEINER, PLUCKER, OTTO HESSE, CAYLEY, KIRKMAN, SALMON.

(*Voir* Journal de M. Crelle, tome XLI, page 60; 1850; en français, par M. Cayley.)

---

1. *Notation.* Nous désignons les six sommets d'un hexagone par les six lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*;
ae est la droite qui va de *a* en *e*, et ainsi des autres;
ae.*df* est le point d'intersection des droites *ae*, *df*, et ainsi des autres;
abcdef est l'hexagone allant de *a* en *b*, de *b* en *c*, de *c* en *d*, de *d* en *e*, de *e* en *f* et de *f* en *a*.

2. On peut réunir les six sommets d'un hexagone par quinze droites *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, etc.

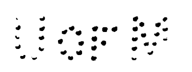
Points p. Ces quinze droites se coupent en quarante-cinq points, en excluant les sommets de l'hexagone.

Nous désignons chacun de ces quarante-cinq points par *p*, lettre initiale du nom de Pascal.

Observation. Il peut se faire que trois de ces droites se coupent en un seul point; alors, au lieu de donner trois points *p*, elles ne donnent qu'un seul point.

3. Six points peuvent devenir les sommets de soixante hexagones. En effet, soit l'hexagone *abcdef*; les lettres *b*, *c*, *d*, *e*, *f* fournissent cent vingt permutations; mais le polygone *abcdef* est le même que le polygone *afedcb*; chaque polygone étant *double*, il n'existe donc que soixante hexagones différents.

4. THÉORÈME DE PASCAL. *Un hexagone étant inscrit dans une conique, les trois systèmes de côtés opposés fournissent chacun un point p; les trois points sont en*



ligne droite; et, réciproquement, si les trois points p ainsi obtenus sont en ligne droite, l'hexagone est inscriptible dans une conique.

Démonstration. Droites P. Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème segmentaire de Desargues sur le triangle coupé par une conique. (*Voir* HAILLECOURT, tome VII, page 83. Pour la démonstration analytique, *voir* ROGUET, tome III, page 304, et LEBESGUE, tome VIII, page 139.) Il est évident qu'à chacun des soixante hexagones correspond une droite différente. Nous désignons chacune de ces droites par la lettre P.

5. THÉORÈME. *Par chaque point p passent toujours quatre droites* P *et pas davantage.*

Démonstration. Formons les quatre hexagones

$$abcdef,$$
$$abfdec,$$
$$abcedf,$$
$$abfedc;$$

les côtés opposés *ab*, *de* sont les mêmes dans les quatre hexagones, et l'on n'en peut former un cinquième ayant la même disposition; donc, etc.

Il s'ensuit que les quarante-cinq points *p* sont distribués sur les soixante droites P, et chaque point est *quadruple*, pour ainsi dire.

6. Les soixante hexagones se divisent en trente groupes ayant chacun en commun quatre côtés; les deux hexagones

$$abcdef,$$
$$abcdfe,$$

ont en commun les côtés *ab*, *bc*, *cd* consécutifs et *ef* non consécutif; et les deux droites P, correspondant à ces hexagones, se coupent dans le point *p* donné par l'intersection de *bc* et *ef*.

7. On peut former six hexagones ayant en commun trois côtés non successifs, savoir :

(1)	*abcdef*,
(2)	*abdcfe*,
(3)	*abefdc*,
(4)	*abcfcd*,
(5)	*abfecd*,
(6)	*abfedc*;

les cinq derniers hexagones n'ont que trois côtés non successifs en commun avec le premier, les côtés *ab*, *cd*, *ef*.

8. Si deux hexagones ont en commun trois côtés non successifs, les six autres côtés forment un troisième hexagone. Soient les deux hexagones *abcdef*, *abdcfe*; ils ont en commun *ab*, *cd*, *ef*; les six autres côtés non communs, *bc*, *de*, *ae*, *bd*, *cf*, *af*, forment l'hexagone *aedbcf*, et ces trois hexagones, pris deux à deux, ont en commun trois côtés non successifs.

9. Premier théorème de M. Steiner. *Soient les trois hexagones*

(A)	*abcdef*;	*ab.de*;	*cd.af*;	*ef.bc*;	P;
	abefcd;	*ab.cf*;	*cd.be*;	*ef.ad*;	P′;
	adebcf;	*de.cf*;	*af.be*;	*ad.bc*;	P″;

les trois hexagones, pris deux à deux, ont trois côtés non successifs en commun; les trois droites P, P′, P″, *qui correspondent à ces hexagones, se rencontrent en un même point.*

Démonstration. A côté de chaque hexagone, écrivons les trois points *p* correspondants; et, allant de gauche à droite, désignons les points de la droite

P par α, β, γ;
P′ par α', β', γ';
P″ par α'', β''; γ'';

il est évident que la droite

$\alpha\alpha'$ est le prolongement de *ab*;
$\beta\beta'$ est le prolongement de *cd*;
$\alpha\alpha''$ est le prolongement de *de*;
$\beta\beta''$ est le prolongement de *af*;
$\alpha'\alpha''$ est le prolongement de *cf*;
$\beta'\beta''$ est le prolongement de *be*.

Ces six droites forment l'hexagone *abedcf*, dont les trois points *p* sont *ab.cd*; *de.af*; *be.cf*. Donc, dans les deux triangles $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, les côtés $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$; $\alpha\alpha''$, $\beta\beta''$; $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$ se coupent respectivement en trois points qui sont sur la droite P de l'hexagone *abedcf*; ainsi, les trois droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ ou P, P', P'' se coupent en un même point (*voir* page 115, question 254). C. Q. F. D.

A l'hexagone *abcdef*, nous avons joint l'hexagone (4) du n° 7; si l'on y joint un des quatre autres hexagones, le raisonnement précédent n'a plus lieu. Ainsi, l'hexagone *abcdef* étant donné, les deux autres qu'il y faut joindre sont déterminés. Les soixante hexagones se divisent donc en vingt groupes; chaque groupe renferme trois hexagones, dont les droites P convergent vers le même point. Nous désignons chacun de ces vingt points par la lettre *s*. Chaque droite P contient trois points *p* et un point *s*; tout point *p* est *quadruple* et tout point *s* est *triple*.

Ainsi, pour que les trois droites P de trois hexagones se rencontrent en un même point, il faut que, pris deux à deux, ces hexagones aient trois côtés non successifs en commun. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante.

Appelons *système conjugué* le système des trois hexagones A.

Observation. Le second polygone du système A peut s'écrire ainsi, *adcfeb*. On voit alors que le troisième polygone se déduit du second, comme le second du premier.

10. Théorème de M. Plucker. *Les droites P des hexagones*

(1)	*abcdef*,	P′,
(2)	*abdcfe*,	P″,
(3)	*abefdc*,	P‴,

et les côtés ab, ef, cd forment un hexagone inscriptible dans une conique.

Désignons la droite P de (1) par P′; de (2) par P″ et de (3) par P‴. Formons un hexagone avec les six côtés successifs P′, *ab*, P″, *ef*, P‴, *cd*. (O);

l'intersection de P′ et *ef* est la même que *ef*.*bc*;
l'intersection de P″ et *cd* est la même que *cd*.*ae*;
l'intersection de P‴ et *ab* est la même que *ab*.*df*.

Or ces trois intersections sont sur la droite P de l'hexagone *abcdfe*; donc l'hexagone (O) est inscriptible dans une conique.

Observation. Cette conique n'est pas la même que la conique donnée; mais la droite P, relative à cette seconde conique, est une droite P de la première conique.

Second théorème de M. Steiner. *Les quatre points s correspondant aux quatre systèmes conjugués,*

$$(A)\quad \left\{\begin{matrix} abcdef, & (a_1) \\ abefcd, & (a_2) \\ afcbed, & (a_3) \end{matrix}\right\}(\alpha),$$

$$(B)\quad \left\{\begin{matrix} acbedf, & (b_1) \\ acdfbe, & (b_2) \\ aedcbf, & (b_3) \end{matrix}\right\}(\beta),$$

$$(C)\quad \left\{\begin{matrix} adecbf, & (c_1) \\ adbfec, & (c_2) \\ afedbc, & (c_3) \end{matrix}\right\}(\gamma),$$

$$(D) \qquad \left.\begin{array}{ll} aedbcf, & (d_1) \\ accfdb, & (d_2) \\ abcedf, & (d_3) \end{array}\right\} (\delta),$$

sont sur une même droite.

Désignons les droites P du système (A) par a_1, a_2, a_3; celles du système (B) par b_1, b_2, b_3, etc., et les quatre points s correspondants par α, β, γ, δ. Formons les trois hexagones avec les côtés successifs

$$a_1,\ af;\ b_1,\ de;\ c_1,\ bc;$$
$$a_3,\ af;\ b_3,\ de;\ c_3,\ bc;$$
$$a_1,\ c_3;\ b_1,\ a_3;\ c_1,\ b_3.$$

D'après le théorème précédent, le premier hexagone est inscriptible dans une conique; d_3 est la droite P de cet hexagone; le second hexagone est aussi inscriptible dans une conique, et d_1 en est la droite P, et ces deux hexagones ont les mêmes six sommets; car l'intersection de a_1 et bc est le point $bc.ef$; et l'intersection de c_3, bc est aussi le même point $bc.ef$: ainsi les six sommets a_1, bc; bc, c_1; c_1, de; de, b_1; b_1, af; af, a_1; sont les mêmes que les sommets c_3, bc; bc, a_3; b_3, de; de, c_3; a_3, af.

Or le troisième hexagone a les mêmes sommets que les deux précédents; car a_1 et c_3 se coupent au point $bc.ef$, qui est le même que $bc.a_1$, et ainsi des autres; donc le troisième hexagone est aussi inscriptible, et, par conséquent, les points a_1, a_3; b_1, b_3; c_1, c_3 sont sur une même droite; donc les points α, β, γ sont sur une même droite, de même β, γ, δ; donc les quatre points α, β, γ, δ sont sur une même droite.

Cette démonstration et celle du premier théorème (9) sont de M. Plücker.

11. *Droites* S. Nous désignons ces droites par la lettre S;

les vingt points s sont distribués quatre à quatre sur une même droite; comme chaque point s est commun à trois droites, il s'ensuit qu'il existe quinze droites S correspondant aux quinze manières de réunir les sommets de l'hexagone (2); ainsi, par chaque point s passent trois droites P et trois droites S.

12. Théorème de M. Otto Hesse. *Soit* O *un point où se réunissent trois droites* S, *et soient* $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$, *les autres points s qui se trouvent respectivement sur la première, la deuxième et la troisième droite* S; *les points* $\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta''; \gamma, \gamma', \gamma''$, *sont les sommets de trois triangles. Les intersections des côtés homologues des triangles* $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$, *donnent trois points s situés sur une droite* S; *de même les intersections respectives des triangles* $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ *et* $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$ *et* $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$; *les trois nouvelles droites* S *se rencontrent en un point* O' *qui est aussi un point s; les points* O *et* O' *sont conjugués relativement à la conique. Cette figure renferme quinze droites, savoir : les trois droites* S *données, les neuf côtés des triangles et les trois droites* S *qui s'en déduisent; et vingt points, savoir : les dix points s donnés et les dix points qui s'en déduisent; ce sont les quinze droites* S *et les vingt points s; ces vingt points forment dix couples, et les points de chaque couple sont conjugués relativement à la conique.*

Démonstration. A trouver.

13. Théorème de M. Kirkman. *Les trois droites* P *des hexagones*

$$abcdef,\ P_1,$$
$$abefdc,\ P_2,$$
$$acbedf,\ P_3,$$

convergent vers le même point.

Démonstration. Les trois points

$A = af.cd$; $B = ab.de$; $C = bc.ef$, déterminent la droite P_1,
$A' = be.cd$; $B' = ac.ef$; $C' = ab.df$, déterminent la droite P_2,
$A'' = be.af$; $B'' = bc.df$; $C'' = ac.de$, déterminent la droite P_3,

où le signe = exprime que le point A, par exemple, est l'intersection des lignes af, cd, et ainsi des autres.

Les points A, A', A''; B, B', B''; C, C', C'', sont les sommets de trois triangles.

Combinons A avec C :

le côté AA' se confond avec la droite cd,
le côté AA'' se confond avec la droite af,
le côté A'A'' se confond avec la droite be,

le côté CC' se confond avec la droite P de l'hexagone *aefdcb*,
le côté CC'' se confond avec la droite *acbdef*,
le côté C'B'' se confond avec la droite *acfdeb*.

Ainsi,

le point $AA'.CC' = cd.ae$,
le point $AA''.CC'' = af.bd$,
le point $A'A''.C'C'' = be.cf$.

Ces trois points sont sur la droite P de l'hexagone *afcdbe*; donc les trois droites P_1, P_2, P_3, passent par le même point (*voir* page 115, question 254).

En combinant A avec B, on trouve que les trois points sont sur la droite P de *afbecd*; les deux droites P des hexagones

afcdbe,
afbecd,

donnent un point s.

14. *Points k.* Nous désignons par la lettre k les points qu'on trouve par ce théorème. Il y a cette différence entre les points s et k : un point s est donné par le système

abcdef,
abcfcd,
adebcf.

Remplaçant le premier polygone par le second, on a le système

abefcd,
abcdef,
adebcf,

le même que le précédent. On trouve encore le même système en prenant le troisième hexagone pour le premier; de sorte que les soixante hexagones ne donnent que vingt points *s*, tandis qu'un point *k* est donné par le système

abcdef,
abefdc,
acbedf.

Prenant le second hexagone pour le premier hexagone, on a le système

abefdc,
abdcef,
acbedf,

système différent du premier et donnant un autre point *k*. Il existe donc soixante points *k*.

15. Théorème de M. Cayley. *Les trois points k correspondant aux systèmes*

$$\left.\begin{matrix} abcfed \\ abedfc \\ acbefd \end{matrix}\right\} k_1, \quad \left.\begin{matrix} abcdfe \\ abfedc \\ acbfde \end{matrix}\right\} k_2, \quad \left.\begin{matrix} abcedf \\ abdfec \\ acbdef \end{matrix}\right\} k_3,$$

sont en ligne droite.

Démonstration. Droites C. Ayant égard aux vingt-sept

points p des neuf droites P de ces neuf hexagones, on voit que

le point k_1 est le même que le point B′B″.C′C″
le point k_2 est le même que le point B B′.C C′
le point k_3 est le même que le point B B″.C C″
} du théorème précédent.

Or ces trois derniers points sont sur une même droite (13); donc les trois points k sont sur une même droite, que nous désignerons par la lettre C; ainsi, les soixante points k sont distribués sur vingt droites C.

16. Théorème de M. Salmon. *Chaque droite* C *passe par un point s.*

Démonstration. Nous avons vu ci-dessus (13) que la droite qui renferme les points k_1, k_2, k_3, passe par un point s; ainsi, d'après ce théorème, chaque point s est le point de rencontre de trois droites P et d'une droite C.

17. *Droites* K. Second théorème de M. Kirkman. *Il existe quatre-vingt-dix droites* K, *contenant chacune deux points k et un point p.*

Démonstration. Soient le point k_1 donné par le système

abcdef, B″,
abefdc, A″,
acbedf, C″;

le point k_2 donné par le système

adebcf, C′,
adcfbe, A′,
acdcbf, B′,

et le point p donné par

bc.de;

le point *bc.de* est l'intersection des trois droites

acbfed, A,
bc, B,
de, C;

A est la droite P de l'hexagone correspondant :

le point AA′ est le même que *ad*.*bf*,
le point BB′ est le même que *bc*.*ae*,
le point AA″ est le même que *ac*.*ef*,
le point BB″ est le même que *bc*.*ef*,
le point A′A″ est le même que *cd*.*be*,
le point B′B″ est le même que *af*.*cd*;

AA′ .BB′ est la droite P de l'hexagone *adcbfe*,
AA″ .BB″ est le côté *ef*,
A′A″.B′B″ est le côté *cd*.

Or ces trois droites se rencontrent au même point *ef*.*cd*; donc, d'après le théorème connu (question 254), les trois points k_1, k_2, p se rencontrent en un même point.

En changeant *b* en *c* et *c* en *b*, le point *p* reste le même; à chaque point *p* correspondent donc deux droites K : il existe donc quatre-vingt-dix droites K; par le même point *p* passent donc quatre droites P et deux droites K.

Observations. *cb*.*ed* et *bc*.*de* donnent la même droite K, et de même *cb*.*de* et *bc*.*ed*.

18. Au résumé, le théorème de Pascal présente de remarquables :

1°. Quarante-cinq points *p*, vingt points *s*, soixante points *k*;

2°. Soixante droites P, quinze droites S, vingt droites C, quatre-vingt-dix droites K;

3°. Par chaque point *p* passent quatre droites P et deux droites K;

4°. Par chaque point *s* passent trois droites P et une droite C;

5°. Par chaque point *k* passent trois droites K.

19. M. Catalan nous a communiqué les théorèmes suivants, qu'il a consignés dans une *Application d'Algèbre à la Géométrie*, ouvrage lithographié non achevé.

Théorème I. *Lorsqu'un hexagone est inscrit à une*

conique, les six points de concours des côtés qui ne sont ni consécutifs ni opposés, sont les sommets d'un hexagone circonscriptible à une autre conique.

Théorème II. *Quand un hexagone est circonscrit à une conique, les droites menées par les sommets, qui ne sont ni consécutifs ni opposés, sont les côtés d'un hexagone inscriptible à une autre conique.*

Théorème III. *Lorsque des hexagones* H, H′ *sont, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second; si l'on prolonge dans* H *les côtés qui ne sont ni consécutifs ni opposés, et si l'on joint dans* H′ *les sommets qui ne sont ni consécutifs ni opposés, on obtient, d'une part, les sommets d'un hexagone h circonscriptible à une conique c, et, de l'autre, les côtés d'un hexagone h′ inscriptible dans une conique c′; le point de concours des droites qui joignent les sommets opposés de l'hexagone h est, relativement à la conique donnée* C, *le pôle de la droite sur laquelle sont situés les points de concours des côtés opposés de l'hexagone h′, et les deux hexagones h et h′ sont polaires réciproques relativement à cette même conique.*

20. *Note bibliographique.* Pascal, ayant à peine dix-sept ans, a publié son théorème en 1640. Cet opuscule de huit pages in-8°, intitulé : *Essai sur les coniques*, était complétement oublié lorsque Bossut le réimprima dans l'édition des OEuvres complètes de Pascal, qu'il donna en 1779. Ce même opuscule commence le tome IV de la nouvelle édition des OEuvres complètes, que donna Berth... en 1819. Le théorème y est simplement énoncé sous la forme de lemme I (page 2); le nom d'*hexagramme mystique* ne s'y trouve pas. On ne connaît ce nom que par une lettre de Leibnitz, datée de Paris, 30 août 1676, et adressée à Perrier, neveu de Pascal, conseiller à Cler-

mont-Ferrand. Cette lettre est à la fin du tome V de la nouvelle édition. On avait remis à Leibnitz tous les manuscrits scientifiques de Pascal, mort le 19 août 1662.

Une pièce portait pour inscription : *Generatio coni sectionum seu projectio peripheriæ, tangentium et secantium circuli in quibuscumque oculi, plani et tabulæ positionibus.*

Leibnitz dit que Pascal développe ici les propriétés fondamentales d'une certaine figure composée de six lignes droites, et qu'il nomme *hexagrammatum mysticum*. D'après cette indication, il est probable que c'est la méthode perspective qui a conduit Pascal à son théorème. En effet, la proposition est évidente lorsqu'il s'agit d'un hexagone inscrit dans un cercle et ayant les côtés opposés parallèles. La mise en perspective de cette figure donne le théorème général. Desargues avait déjà émis l'idée si féconde de considérer le parallélisme comme une convergence vers l'infini, et de ramener par la perspective les distances infinies à des distances finies : c'est même ce qui avait fait croire à Descartes que l'*hexagramme* pourrait bien appartenir à Desargues. Leibnitz ajoute que tous les écrits de Pascal étaient prêts pour l'impression et éminemment dignes de l'impression. On ignore ce qui a empêché la famille de suivre ce conseil. La publication de ces précieux travaux aurait hâté les progrès de la géométrie segmentaire. Les manuscrits sont détruits, ou gisent dans quelque lieu inexploré.

Le travail de M. Kirkman est inséré dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1850.

MÉMOIRES RELATIFS A L'HEXAGRAMME.

Journal de Crelle.

Plucker, tome V, page 268; 1829.
Plucker, tome IX, page 411; 1833.

Plucker, tome XI, page 26; 1834.
Hesse (Otto), tome XXIV, page 36.
Jacobi (A.), lieutenant, tome XXXI, page 178; 1846.
Un historique sur le théorème. Plucker, tome XXXIV, page 337; 1846.
Möbius, tome XXXVI, page 216; 1848.
Cayley, tome XLI, page 66; 1850, en français.
Cayley, tome XLI, page 84; 1850, en français.
Hesse (Otto), tome XLI, page 269; 1851.
Anonyme, tome VI, page 310; 1830.

Annales de Gergonne.

Darraude (J.-B.), tome XIV, page 29; 1823.
Gergonne, tome IV, page 78; 1813.
Sturm, tome XVI, page 265; 1825.
Gergonne, tome XVIII, page 214; 1827.
Steiner, XVIII, page 319; 1827.
(Premiers énoncés rectifiés depuis par M. Plücker.)

ÉPURE DE LA PLUS COURTE DISTANCE;

Par M. Abel TRANSON.

La construction de la plus courte distance entre deux droites a été retranchée des nouveaux programmes (*). Mais la méthode suivante, que plusieurs professeurs m'ont paru goûter, semblera peut-être plus simple dans l'exécution que l'ancienne.

Menez deux plans α et β respectivement perpendiculaires aux deux droites données A et B. Cette construction auxiliaire fait connaître, par l'intersection (I, I') de α et β, la direction de la perpendiculaire commune.

(*) C'est pourtant une épure fondamentale. Tm.

Ensuite menez par A un plan PpP' parallèle à (I, I'), et cherchez le point (b, b') où ce plan est percé par B. Ce point appartient à la perpendiculaire commune. Menez par (b, b') une parallèle à(I, I') jusqu'à sa rencontre (a, a') avec A. La distance des points a et b sera la plus courte distance cherchée.

On est prié de faire la figure.

Note. Cette construction peut servir à trouver facilement les équations des projections orthogonales de la plus courte distance, lorsqu'on connaît les équations des deux droites. TM.

NOTE SUR LE THÉORÈME DE TAYLOR;

PAR M. LE Dr O. SCHLÖMILCH,
Professeur d'analyse à l'École Polytechnique de Dresde.

Quand on fait usage du théorème de Taylor pour le développement des fonctions en séries, on trouve souvent que l'on a besoin de recherches étendues pour déterminer les limites entre lesquelles subsiste le développement. On sait qu'il y a deux méthodes pour cette discussion : l'une consiste à calculer le reste de la série et à chercher les conditions sous lesquelles il converge vers la limite zéro; mais comme ce reste est de la forme

$$\frac{x^n f^{(n)}(\theta x)}{1.2.3\ldots n},$$

on est forcé de développer d'abord la dérivée $f^n(x)$, ce qui exige un calcul très-incommode, dès que la fonction $f(x)$ n'est pas très-simple. L'autre méthode a été donnée par M. Cauchy; elle n'exige pas cette discussion

du reste, elle est au contraire extrêmement simple : mais on avouera que la démonstration du théorème admirable de ce géomètre (MOIGNO, page 150) n'est pas à la portée de ceux qui font leurs premiers pas dans la science. Peut-être trouvera-t-on que le procédé que nous allons expliquer est assez simple, sans cesser d'être rigoureux.

On se convaincra sans peine, et sans le secours du calcul intégral, que toute fonction $F(x)$, dont la dérivée $F'(x)$ est constamment nulle, est nécessairement une constante; mais il n'est pas nécessaire que cette constante conserve toujours la même valeur : au contraire, si la fonction $F(x)$ offre une solution de continuité, la valeur constante de $F(x)$ ne reste pas la même, avant et après cette solution. Supposons, par exemple, que la fonction devienne discontinue pour $x=\xi$; alors l'équation $F'(x)=0$ donne deux valeurs constantes de $F(x)$, l'une $F(0)$ pour $x<\xi$, l'autre $F(\infty)$ pour $x>\xi$ (*). On peut donc dire que l'équation $F'(x)=0$ entraîne la suivante $F(x)=F(a)$, pourvu que x et a soient situés dans le même intervalle de continuité, mais que cette équation cesse de subsister si x et a sont situés dans de divers intervalles. Voilà tout ce dont nous avons besoin.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver la somme de la série infinie

$$(1)\qquad f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\dots$$

En vertu de la définition exacte de la somme d'une série infinie, ce n'est que la limite vers laquelle converge la

---

(*) La droite parallèle à l'axe des x change subitement de position pour $x=\xi$, mais conserve sa direction. TM.

somme finie

$$f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x),$$

que nous désignons par F (x, n). En prenant la dérivée, on trouve facilement

$$(2)\qquad F'(x,n)=\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x).$$

Maintenant, si nous faisons croître indéfiniment le nombre n, l'expression F' (x, n) deviendra la dérivée de la série infinie ci-dessus; c'est-à-dire l'équation

$$F(x)=f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$

donne

$$F'(x)=\lim\left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)\right].$$

Si la limite indiquée est zéro, la fonction inconnue F (x) se réduit à une constante; pour la déterminer, on n'a besoin que de prendre $x=a$ dans l'équation ci-dessus, et l'on aura F (x) = F $(a) = f(a)$, et, par conséquent,

$$(3)\quad f(a)=f(x)+\frac{a-x}{1}f'(x)+\frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x)+\ldots.$$

En vertu des remarques que nous avons faites, l'existence de cette équation se trouve assujettie à deux conditions : la première condition s'exprime par l'équation

$$(4)\qquad \lim\left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)\right]=0;$$

la seconde est que la fonction F (x) demeure continue, si

l'on va de $x = x^\circ$ jusqu'à $x = a$. Cette condition se peut énoncer d'une manière différente, quand on observe que la fonction F (x) sera toujours continue si la dérivée $F'(x)$ jouit de la même propriété; cette dernière fonction est la limite de l'expression $F'(x, n)$; donc, si $F'(x, n)$ est continue, quel que soit le nombre n, il est clair que $F'(x)$ et, par conséquent, $F(x)$ seront de même continues. En ayant égard à la valeur (2) de $F'(x, n)$, on verra sur-le-champ que la continuité de $F'(x, n)$ n'exige que la continuité de $f^{(n)}(x)$, et l'on parvient ainsi au théorème suivant :

Quand il existe un intervalle dans lequel toutes les fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, etc., sont continues, alors

$$f(a) = f(x) + \frac{a-x}{1} f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2} f''(x) + \ldots,$$

pourvu que les valeurs x et a soient comprises dans cet intervalle et qu'elles satisfassent à la condition

$$\lim \left[\frac{(a-x)^{n-1}}{1.2 \ldots (n-1)} f^{(n)}(x) \right] = 0.$$

En prenant $a = x + h$, on aura le théorème de Taylor; pour obtenir le théorème de Maclaurin, nous faisons $x = 0$, et nous remplaçons a par x; alors on peut s'exprimer de la manière suivante :

Si les fonctions $f(x), f'(x), f''(x)$, etc., sont continues dans un intervalle qu'embrasse la valeur $x = 0$, alors il sera possible de développer la fonction $f(x)$ en série de la forme

$$(5) \quad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots \left[A_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2 \ldots n} \right];$$

ce développement subsiste pour toutes les valeurs de x qui sont comprises dans l'intervalle indiqué, et qui, en

même temps, vérifient la condition

$$(6) \qquad \lim [n A_n x^{n-1}] = 0.$$

Ce théorème justifie la méthode des coefficients indéterminés, si facile à employer; il contient deux conditions différentes : l'une sert à déterminer les *fonctions* qui sont développables en séries de puissances, l'autre fait connaître les *valeurs* pour lesquelles subsiste le développement.

Pour faire voir la facilité qu'offre l'application de notre théorème, nous prenons pour exemple

$$f(x) = \cos(\mu \text{ arc } \sin x);$$

on en déduit d'abord

$$(7) \quad \begin{cases} f'(x) = -\dfrac{\mu \sin(\mu \text{ arc } \sin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f''(x) = -\dfrac{\mu x \sin(\mu \text{ arc } \sin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\mu^2 \cos(\mu \text{ arc } \sin x)}{1-x^2}, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(1-x^2) f''(x) = x f'(x) - \mu^2 f(x).$$

En différentiant k fois cette équation, on trouvera facilement

$$(8) \quad f^{(k+2)}(x) = \frac{(2k+1)\, x f^{(k+1)}(x) + (k^2 - \mu^2) f^{(k)}(x)}{1-x^2}.$$

Cette équation fait reconnaître que la fonction $f^{(k+2)}(x)$ est continue entre les limites $x = -1$ et $x = +1$, si les fonctions $f^{(k+1)}(x)$ et $f^{(k)}(x)$ jouissent de la même propriété; mais, comme il est clair que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ n'offrent aucune solution de continuité entre ces limites, on en conclut que toutes les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, etc., sont continues pour $1 > x > -1$; le développement est donc possible.

Maintenant on trouve, à l'aide des formules (7) et (8) :

$$f(0)=1, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=-\mu^2,$$
$$f'''(0)=0, \quad f^{\text{IV}}(0)=-\mu^2(2^2-\mu^2), \text{ etc.},$$

ce qui donne le développement

$$(9) \quad \cos(\mu \operatorname{arc} \sin x)=1-\frac{\mu^2}{1.2}x^2-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{1.2.3.4}x^4-\ldots..$$

D'ailleurs, il est facile de prouver que l'expression

$$n A_n x^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\ldots[(2k)^2-\mu^2]}{1.2.3\ldots(2k-1)}x^{2k-1},$$

converge vers la limite zéro, en supposant

$$1>x>-1;$$

les conditions nécessaires sont donc satisfaites par la détermination $1>x>-1$. En prenant enfin

$$\operatorname{arc} \sin x = z,$$

on aura

$$\cos \mu z = 1-\frac{\mu^2}{1.2}\sin^2 z+\frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 z-\ldots,$$
$$\frac{\pi}{2}>z>-\frac{\pi}{2}.$$

Cette formule est assez connue, mais sa démonstration ordinaire est moins simple et ne s'appuie pas sur le théorème de Maclaurin.

SUR LA DIVISION DES ARCS DE QUELQUES COURBES, DÉRIVÉES D'UNE SECTION CONIQUE;

PAR M. STREBOR.

Dans le tome III des *Nouvelles Annales*, page 506, on trouve la démonstration des théorèmes à l'aide des

quels on peut déterminer géométriquement des arcs sur une ellipse ou sur une hyperbole, dont la différence est rectifiable. Les constructions dont il s'agit s'effectuent au moyen de coniques homofocales avec la donnée.

M. Chasles a remarqué que les arcs d'une hyperbole équilatère à différence rectifiable répondent à des arcs égaux sur la lemniscate qui dérive de l'hyperbole. Cet énoncé s'applique également, en regardant la lemniscate comme dérivée de l'hyperbole par la méthode des rayons vecteurs réciproques, ou bien comme lieu des projections orthogonales du centre de l'hyperbole sur ses tangentes.

Considérons, plus généralement, la courbe qu'on obtient d'une conique centrale quelconque, par la construction des rayons vecteurs réciproques issus du centre. Dans le cas d'une ellipse, les arcs de cette courbe, qui répondent aux arcs d'ellipse à différence rectifiable, ont pour différence un arc de cercle; et pour l'hyperbole, les arcs de la courbe dérivée qui répondent aux arcs à différence rectifiable, ont pour différence une quantité circulaire ou logarithmique, selon que l'axe imaginaire de l'hyperbole est plus grand ou plus petit que son axe réel.

On sait que la courbe qu'on vient de considérer est aussi le lieu des projections orthogonales du centre d'une conique sur ses tangentes. Par conséquent, on peut déterminer sur une telle courbe, dérivée d'une ellipse, des arcs à différence circulaire; car ces arcs répondent évidemment à des arcs à différence rectifiable sur l'ellipse ayant pour axes les réciproques des axes de l'ellipse donnée; et pareillement pour l'hyperbole.

Maintenant, supposons qu'on dérive d'une ellipse une courbe, en projetant le centre orthogonalement sur les tangentes, et de cette nouvelle courbe une autre, en ré-

pétant la même construction, et ainsi de suite. En désignant l'ellipse comme la première de cette série, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

Les arcs de la troisième, cinquième courbe, et d'une courbe quelconque de cette série d'ordre impair, qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur la première, c'est-à-dire sur l'ellipse, ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire.

Les arcs de la quatrième, sixième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre pair, qui répondent à des arcs à différence circulaire sur la seconde, ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire.

Considérons la courbe, enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des diamètres d'une ellipse, et supposons qu'on dérive de cette courbe une autre courbe d'après la même méthode de génération, et ainsi de suite. En regardant l'ellipse comme la première, on peut énoncer les deux théorèmes que voici :

Les arcs de la troisième, cinquième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre impair qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur la première, ont pour différence une quantité algébrique.

Les arcs de la deuxième, quatrième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre pair qui répondent à des arcs à différence circulaire sur la courbe, lieu des projections orthogonales du centre de l'ellipse (la première) sur ses tangentes, ont pour différence une quantité algébrique.

Supposons qu'on dérive d'une hyperbole une suite de courbes se succédant d'après la première des deux lois qu'on vient de considérer pour l'ellipse; on aura donc deux théorèmes que voici :

Les arcs de la troisième, cinquième courbe, et d'une

courbe quelconque d'ordre impair qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur l'hyperbole (la première), ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire ou logarithmique, selon que l'axe réel de l'hyperbole est plus petit où plus grand que son axe imaginaire.

Les arcs de la quatrième, sixième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre pair, qui répondent à des arcs à différence circulaire (ou logarithmique) sur la seconde, ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire (ou logarithmique).

On doit observer que, si les arcs des courbes d'ordre impair admettent dans leurs différences une quantité circulaire (ou logarithmique), la quantité analogue qui figure dans les courbes d'ordre pair sera logarithmique (ou circulaire), et *vice versâ*.

Ces théorèmes se simplifient beaucoup pour l'hyperbole équilatère. Dans ce cas, les arcs d'une courbe quelconque de la série, d'un ordre pair ou impair, qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur l'hyperbole, ont eux-mêmes une différence rectifiable. Cette différence s'évanouit pour la seconde, c'est-à-dire pour la lemniscate ; ce qui s'accorde avec le théorème de M. Chasles.

Des théorèmes analogues à ceux que nous avons constatés dans le cas de l'ellipse, existent pour la série de courbes dérivées de l'hyperbole, d'après la seconde des lois que nous avons considérées. Une partie algébrique seulement se trouve dans les différences des arcs des courbes dont il s'agit.

Je finirai en mentionnant un théorème de géométrie sphérique :

Les arcs d'une hyperbole équilatère sphérique (de première espèce), qui ont pour différence un arc de

grand cercle, répondent à des arcs égaux sur la sphéro-lemniscate (de première espèce) qui dérive de l'hyperbole. (*Voir* les *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 135-137.)

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 249

(voir t. XI, p. 48);

PAR M. L'ABBÉ CUSSET,
Du séminaire de Vals.

Un nombre pair étant décomposé, autant de fois que faire se peut, en deux facteurs, l'un impair (l'unité comprise) et l'autre pair; la somme des facteurs pairs, moins la somme des facteurs impairs correspondants, est égale à la somme de tous les diviseurs de la moitié du nombre donné. (JACOBI.)

Cette question n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général qui peut s'énoncer ainsi :

On donne un nombre quelconque $N = p^\alpha K$, p étant un nombre premier qui ne divise pas K.

Soient

L la somme de tous les diviseurs de K;

M celle de tous les diviseurs de $p^{\alpha-1}K$.

Si l'on décompose, autant de fois que faire se peut, N en deux facteurs dont l'un soit premier avec p, l'unité comprise, la somme de tous les facteurs non premiers avec p, moins la somme des facteurs premiers avec p, est égale à la somme de tous les facteurs de $p^{\alpha-1}K$ multipliée par $p-1$, c'est-à-dire à $(p-1)M$.

En effet, à chaque facteur de $N = p^\alpha K$, qui est premier avec p ou diviseur de K, correspond un autre diviseur de K, multiplié par p^α, d'où il résulte que la

différence de ces deux sommes est $(p^\alpha - 1)L$; mais

$$\frac{p^\alpha - 1}{p-1}L$$

est la somme des diviseurs de $p^{\alpha-1}K$ que nous représentons par M; donc

$$(p^\alpha - 1)L = (p-1)M.$$

Comme application, faisons

$$p = 2,$$

et la question proposée sera résolue.

Note. M. Casimir Rey a résolu de la même manière le théorème de Jacobi, généralisé.

SOLUTION DE LA QUESTION 235

(voir t. X, p. 188);

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,
Professeur au séminaire de Vals.

Résoudre en nombres rationnels l'équation

$$x^y = y^x.$$

Solution. Supposons que $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ soit une des solutions demandées, on aura

$$x^{\frac{p}{q}} = y^{\frac{m}{n}}, \quad \text{ou bien} \quad x^{pn} = y^{mq}$$

ou bien encore, en posant $pn = r$, $mq = t$,

$$x^r = y^t.$$

Les valeurs $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ satisferont donc au système

des deux équations

$$x^y = y^x,$$
$$x^r = y^t.$$

Cela posé, cherchons à résoudre le système de ces deux équations; on a

$$y \log x = x \log y,$$
$$r \log x = t \log y,$$

d'où

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{t}, \quad y = \frac{r}{t}\,x,$$

(1) $$x = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{t}{r-t}},$$

(2) $$y = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{r}{r-t}}.$$

Par conséquent, pour avoir toutes les solutions demandées, il n'y a qu'à choisir r et t de telle sorte que ces valeurs de x et y soient rationnelles, et pour cela, comme $\frac{r}{r-t} = \frac{t}{r-t} + 1$, il suffira de satisfaire à l'équation

$$\frac{t}{r-t} = e,$$

e étant un nombre entier quelconque, par des valeurs entières de r et t.

Or cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{1+e}{e} = \frac{r}{t};$$

donc, pour avoir les solutions rationnelles de l'équation

$$x^y = y^x,$$

il suffira de donner à e une valeur entière quelconque,

de poser ensuite

$$r = 1 + e,$$
$$t = e,$$

et de substituer ces valeurs dans les expressions (1) et (2) de x et y, ce qui revient à prendre pour formules générales donnant les solutions de la question proposée,

$$x = \left(\frac{1+e}{e}\right)^e, \quad y = \left(\frac{1+e}{e}\right)^{1+e};$$

expressions dans lesquelles e désigne un nouvel entier quelconque.

Observation. Indépendamment des solutions données par les formules précédentes, l'équation proposée en admet une infinité d'autres; mais, comme elles sont évidentes, il est inutile d'en parler.

Note. Une autre solution très-bonne donnée par M. Gennochi exige une trop longue discussion.

SOLUTION DE LA QUESTION 145 (WALLIS)

(voir t. VI, p. 216);

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

La surface dont il s'agit ici peut être considérée comme engendrée par une droite mobile assujettie à rester parallèle à un plan fixe, et à s'appuyer constamment sur une ellipse et sur une droite parallèle au plan de cette courbe. Prenons pour plan des XY le plan directeur, pour plan des YZ, celui de l'ellipse directrice, et supposons, de plus, que les axes OY, OZ soient menés parallèlement à deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Les équations des directrices seront : pour la droite,

$$x = m, \quad y = nz + p;$$

pour l'ellipse,

$$x = 0, \quad a^2y^2 + b^2z^2 = a^2b^2.$$

Les équations de la génératrice seront de la forme

$$z = \alpha, \quad y = 6x + \gamma.$$

En exprimant qu'elle s'appuie constamment sur les directrices, on trouvera entre α, 6, γ, les deux relations

$$n\alpha + p = 6m + \gamma, \quad a^2\gamma^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2.$$

Éliminant α, 6, γ entre ces deux équations et celles de la génératrice, on obtient l'équation

$$a^2(my - px - nxz)^2 = (x - m)^2(a^2 - z^2)b^2.$$

Elle représente un conoïde qui ne peut être coupé suivant une conique que par des plans parallèles à celui des XZ. Du reste, un tel plan donnera toujours pour section une ellipse.

Soit $x = \varepsilon$ un de ces plans ; la section sur le plan des YZ, où elle se trouve projetée en vraie grandeur, aura pour équation

$$\begin{aligned} m^2y^2 - 2mn\varepsilon yz + \left[n^2\alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon - m)\right]z^2 & \\ - 2pm\varepsilon y + 2n\varepsilon^2pz + p^2\varepsilon^2 & = 0 \\ - b^2(\varepsilon - m)^2 & . \end{aligned}$$

Appelons A^2 le carré de la surface de cette ellipse, on a

$$A^2 = -\frac{4L^2\sin^2\gamma}{m^3}\pi^2,$$

γ étant l'angle formé par les axes des Y et des Z.

Or, ici on trouve

$$m = -\frac{4m^2b^2(\varepsilon - m)^2}{a^2}$$

et

$$L = \frac{4m^2 b^4 (\varepsilon - m)^4}{a^2};$$

donc

$$A^2 = \frac{a^2 b^2 (\varepsilon - m)^2 \pi \sin^2 \gamma^2}{m^2},$$

d'où

$$A = \frac{\pi ab - \sin \gamma (\varepsilon m)}{m};$$

par suite, le volume sera

$$V = \int_0^m A\, d\varepsilon = \frac{1}{2} \pi abm \sin \gamma.$$

Ce volume est donc la moitié de celui d'un cylindre qui aurait pour base l'ellipse directrice, et pour hauteur la perpendiculaire abaissée de la droite sur le plan de l'ellipse.

SOLUTION DE LA QUESTION 165

(voir t. VI, p. 394);

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

THÉORÈME. $\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$ *étant l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes,* $\left(\frac{b}{y}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1$ *est l'équation de la polaire réciproque de la développée de l'ellipse, relativement au cercle représenté par*

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2.$$

Démonstration. Désignant par t, v, les coordonnées

d'un centre de courbure, l'équation de la développée est

$$(1) \qquad a^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

L'équation de la polaire du point (t, v) est

$$vy + tx = c^2;$$

d'où

$$v = \frac{c^2 - tx}{y}.$$

Substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(2) \qquad a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} (c^2 - tx)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} c^{\frac{4}{3}}$$

équation d'où l'on déduit, en différentiant et simplifiant,

$$(3) \qquad a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} (c^2 - tx)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} x;$$

il ne s'agit que d'éliminer t entre les équations (2) et (3).

Élevant au cube les deux membres de l'équation (3), on trouve

$$a^2 y^2 (c^2 - tx) = b^2 tx^3, \quad t = \frac{a^2 c^2 y^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2) x},$$

et

$$c^2 - tx = \frac{b^2 c^2 x^2}{(b^2 x^2 + a^2 y^2)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve, après avoir chassé le dénominateur,

$$(a^2 y^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}},$$

ou, en élevant au cube,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = y^2 x^2;$$

ce qui revient à

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1.$$

EXPÉRIENCE DE M. FOUCAULT.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Terquem.)

Je viens de lire dans la *Revue de l'Instruction publique* plusieurs articles plus que malveillants relatifs au travail de M. Foucault sur le pendule. L'auteur de ces articles y mêle des insinuations, regrettables à mon avis, et peu en harmonie avec le ton habituel de ce journal. Quoique la forme même de ces critiques me disposât peu à y attacher de l'importance, j'ai cru devoir vérifier une citation que l'on donne comme sans réplique, et qui, en effet, détachée de ce qui la précède, pourrait constituer pour Poléni un droit à l'explication du phénomène. Mais je vous déclare qu'après avoir lu le Mémoire entier, il me semble impossible de mêler le nom de Poléni à l'histoire de cette découverte. Permettez-moi de vous faire une courte analyse de son travail.

Poléni commence par rapporter textuellement un passage d'Huyghens sur les effets de la force centrifuge, en changeant, pour plus de clarté, la figure, et remplaçant par une perspective le dessin EN COUPE fait par Huyghens. Eh bien, chose incroyable, dans cette reproduction de la figure d'Huyghens, Poléni montre clairement qu'il ne l'a pas comprise, et il représente la force centrifuge comme tangente au parallèle terrestre! Non-seulement il la représente ainsi, mais il place, dans le texte d'Huyghens, une parenthèse, pour apprendre à son lecteur qu'à Paris, la force centrifuge est tangente au parallèle de Paris. Huyghens disait : KH *representat funem quod recedit a perpendiculari* KDÇ *quia rejicitur per motum circularem secundum lineam* DM. Poléni ajoute : *Est autem ea* DM

linea tangens circulum DMO, *parallelum Parisiensem.*

C'est sous l'influence de cette idée sur la direction de la force centrifuge que l'article de Poléni est écrit. Ce qui suit n'a donc aucun fondement sérieux. L'auteur se demande si deux pendules de même longueur oscilleront de la même manière dans des plans perpendiculaires. Il conclut que le contraire est croyable, sans entrer d'ailleurs dans aucune explication. Quant à la phrase citée par M. le rédacteur de la *Revue de l'Instruction publique,* elle signifie simplement que l'arc décrit par le pendule n'est pas rigoureusement dans un seul et même plan, mais que l'on peut négliger sans inconvénient les petites perturbations qui résultent de là.

Évidemment, Poléni ne savait pas qu'en quelques minutes la déviation devient assez grande pour être appréciée à la vue simple et sans instrument de précision. S'il l'avait su, il aurait affirmé, sans hésitation, qu'en un lieu déterminé, il est possible de donner une preuve sensible de la rotation de la terre; il se serait gardé surtout de proposer, pour atteindre ce but, une expérience vague et irréalisable, s'il en avait connu une autre concluante et facile comme l'est celle de M. Foucault. J'ajouterai que Poléni, eût-il positivement énoncé le phénomène (ce qui n'est pas exact), n'aurait aucun droit à être regardé comme le premier qui l'ait expliqué. Quand, après avoir lu le Traité d'Huyghens, et sous forme de commentaire, on affirme que la force centrifuge produite par la rotation de la terre est, à Paris, tangente au parallèle de Paris, on peut avoir, sur l'influence de cette force imaginaire, telles idées que l'on voudra : ces idées sont non avenues aux yeux de la postérité.

J. BERTRAND,
Maître de Conférences à l'École Normale.

Note. Le premier qui ait constaté le mouvement de rotation de la terre par la chute des corps libres, c'est Newton. Le premier qui ait eu l'idée

de constater ce mouvement par la chute des corps non libres par le pendule, c'est Poléni. Il connaît le changement dans la direction des oscillations : *Tum animadverteram (considerata hypothesi terræ motæ) in una penduli oscillatione non describi ab ejus centro perfecte eundemque arcum in plano eodem* (*Philos. Trans.*, v. XLII, p. 303). Il n'insiste pas sur ce fait, et propose de faire osciller le pendule dans un plan méridien, et ensuite dans un plan vertical perpendiculaire à ce plan méridien, et de conclure la rotation de la terre de la différence de durée des oscillations. Dubuat a démontré que cette différence n'existe pas, mais qu'il existe une différence entre le mouvement du pendule à midi et à minuit (t. X, p. 160). Cette différence ne peut-elle pas influer sur une singulière variation d'ascension droite entre des étoiles éloignées de douze heures, que M. Le Verrier vient de signaler? (*Comptes rendus*, séance du 26 avril 1852.) M. Foucault est incontestablement le premier qui se soit attaché uniquement au changement de direction du plan d'oscillation. Son expérience a été avec raison admirée de tout le monde, parce que, par sa simplicité, elle est à la portée de tout le monde. Certes, les expériences optiques du jeune physicien, quoiqu'elles aient une plus haute valeur scientifique, devaient moins exciter la curiosité publique; mais le pendule est d'une utilité populaire.

RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LES SURFACES COURBES;

PAR M. GAUSS.

(Traduit du latin par M. T. A., ancien élève de l'École Polytechnique.)

I.

Les recherches dans lesquelles on s'occupe des directions de diverses droites dans l'espace sont, la plupart du temps, portées à leur plus haut point d'évidence et de simplicité, si l'on se sert, comme auxiliaire, d'une surface sphérique d'un rayon égal à 1, décrite autour d'un centre arbitraire, et dont les différents points seront censés représenter les directions des droites parallèles aux rayons terminés à cette surface. La situation de tous les points dans l'espace étant déterminée par trois coordonnées, savoir, par les distances à trois plans fixes normaux entre eux, il faut, avant tout, considérer les directions des

axes normaux à ces plans : nous désignerons par (1), (2), (3) les points de la surface de la sphère qui représentent ces directions ; leur distance mutuelle sera donc un quadrant. Du reste, nous supposerons les directions des axes allant vers les régions pour lesquelles les coordonnées correspondantes reçoivent un accroissement.

II.

Il ne sera pas inutile de mettre ici sous les yeux quelques propositions qui sont d'un usage fréquent dans les questions de ce genre.

1. L'angle de deux droites qui se coupent a pour mesure l'angle compris entre les points qui, sur la surface de la sphère, répondent à leurs directions.

2. La situation d'un plan quelconque peut être représentée par le grand cercle de la sphère, dont le plan lui est parallèle.

3. L'angle entre deux plans est égal à l'angle sphérique compris entre les deux grands cercles qui les représentent, et, par conséquent, a pour mesure l'arc intercepté entre les pôles de ces grands cercles. Par suite, l'inclinaison d'une droite sur un plan a pour mesure l'arc mené normalement du point qui répond à la direction de la droite, au grand cercle qui représente la situation du plan.

4. Désignant par x, y, z, x', y', z' les coordonnées de deux points, par r la distance entre ces points, et par L le point qui, sur la surface de la sphère, représente la direction de la droite menée du premier point au second, on aura

$$x' = x + r\cos(1)\mathrm{L},$$
$$y' = y + r\cos(2)\mathrm{L},$$
$$z' = z + r\cos(3)\mathrm{L}.$$

5. De là on déduit facilement qu'on a, en général,

$$\cos^2(1)L + \cos^2(2)L + \cos^2(3)L = 1,$$

et, en désignant par L′ un autre point quelconque de la surface de la sphère,

$$\cos(1)L.\cos(1)L' + \cos(2)L.\cos(2)L' + \cos(3)L.\cos(3)L' = \cos LL'.$$

6. Théorème. *En désignant par* L, L′, L″, L‴ *quatre points sur la surface de la sphère, et par* A *l'angle que les arcs* LL′, L″L‴ *forment à leur point de concours, on aura*

$$\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' = \sin LL'.\sin L''L'''.\cos A.$$

Démonstration. Dénotons de plus, par la lettre A, le point même de concours, et posons

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t''';$$

nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t.\cos t'' + \sin t.\sin t'' \cos A,\\
\cos L'L''' &= \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A,\\
\cos LL''' &= \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A,\\
\cos L'L'' &= \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A;
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L''\\
&= \cos A \left(\begin{aligned} &\cos t \cos t'' \sin t' \sin t'''\\ &+ \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t''\\ &- \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''' \end{aligned}\right)\\
&= \cos A\,(\cos t \sin t' - \sin t \cos t')(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''')\\
&= \cos A.\sin(t' - t).\sin(t''' - t'')\\
&= \cos A.\sin LL'.\sin L''L'''.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, comme il part du point A deux branches de chaque grand cercle, il se forme en ce point deux angles, dont l'un est le complément de l'autre à 180 degrés : mais notre analyse montre qu'on doit prendre les branches dont les directions concordent avec le sens de la marche

du point L vers L′, et du point L″ vers L‴ : ceci compris. on voit en même temps que, les grands cercles concourant en deux points, on peut prendre arbitrairement celui des deux qu'on voudra. Au lieu de l'angle A, on peut aussi prendre l'arc compris entre les pôles des grands cercles dont font partie les arcs LL′, L″L‴; mais il est évident qu'on doit prendre les pôles qui sont situés semblablement par rapport à ces arcs, c'est-à-dire que les deux pôles soient situés à droite, quand on marche de L vers L′, et de L″ vers L‴, ou bien tous les deux à gauche.

7. Soient L, L′, L″ trois points sur la surface de la sphère, et posons, pour abréger,

$$\cos(1)L = x, \quad \cos(2)L = y, \quad \cos(3)L = z,$$
$$\cos(1)L' = x', \quad \cos(2)L' = y', \quad \cos(3)L' = z',$$
$$\cos(1)L'' = x'', \quad \cos(2)L'' = y'', \quad \cos(3)L'' = z'',$$

et

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta.$$

Que λ désigne celui des pôles du grand cercle, dont l'arc LL′ fait partie, qui est placé par rapport à cet arc de la même manière que le point (1) est placé par rapport à l'arc (2), (3). Alors on aura, d'après le théorème précédent,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda . \sin(2)(3) . \sin LL',$$

ou, à cause de (2) (3) = 90 degrés,

$$yz' - y'z = \cos(1)\lambda . \sin LL',$$

et, de la même manière,

$$zx' - z'x = \cos(2)\lambda . \sin LL',$$
$$xy' - x'y = \cos(3)\lambda . \sin LL'.$$

Multipliant ces équations respectivement par x'', y'', z'', et ajoutant, nous obtiendrons, au moyen du second théorème rapporté au n° 5,

$$\Delta = \cos \lambda L'' . \sin LL'.$$

Il faut maintenant distinguer trois cas. *Premièrement*, chaque fois que L″ est situé sur le grand cercle dont fait partie l'arc LL′, on aura $\lambda L'' = 90$ degrés, et par suite, $\Delta = 0$. Mais quand L″ est situé hors de ce grand cercle, on aura le *deuxième* cas, s'il est dans le même hémisphère que λ; le *troisième*, s'il est dans l'hémisphère opposé : dans ces derniers cas, les points L, L′, L″ formeront un triangle sphérique, et seront placés, dans le deuxième cas, dans le même ordre que les points (1), (2), (3), et, dans le troisième cas, dans l'ordre opposé. En désignant simplement par L, L′, L″ les angles de ce triangle et par p la perpendiculaire menée, sur la surface de la sphère, du point L″ au côté LL′, on aura

$$\sin p = \sin L . \sin LL'' = \sin L' . \sin L'L'', \quad \text{et} \quad \lambda L'' = 90^\circ \mp p,$$

le signe supérieur devant être pris dans le deuxième cas, et le signe supérieur dans le troisième. De là aussi nous tirons

$$\pm \Delta = \sin L . \sin LL' . \sin LL'' = \sin L' . \sin LL' . \sin L'L''$$
$$= \sin L'' . \sin LL'' . \sin L'L'' .$$

Il est d'ailleurs évident que le premier cas peut être censé compris dans le deuxième ou le troisième, et l'on voit sans embarras que $\pm \Delta$ est égal à six fois le volume de la pyramide formée entre les points L, L′, L″ et le centre de la sphère. Enfin, on tire de là avec la plus grande facilité, que la même expression $\pm \frac{1}{6} \Delta$ exprime généralement le volume d'une pyramide quelconque comprise entre l'origine des coordonnées et les points dont x, y, z ; x', y' ; z' ; x'', y'', z'' sont les coordonnées.

III.

Une surface courbe est dite avoir une courbure *continue* en un point A situé sur elle, si les directions de toutes

les droites menées du point A à tous les points de la surface infiniment peu distants de A, ne s'écartent qu'infiniment peu d'un seul et même plan passant par A : ce plan est dit *tangent* à la surface au point A. Si l'on ne peut satisfaire à cette condition en quelque point, la continuité de la courbure est interrompue en cet endroit, comme il arrive, par exemple, au sommet du cône. Les recherches présentes seront restreintes aux surfaces courbes, ou aux portions de surface, pour lesquelles la continuité de courbure n'est nulle part interrompue. Nous observons seulement ici, que les méthodes qui servent à déterminer la position du plan tangent perdent leur valeur pour les points singuliers dans lesquels la continuité de courbure est interrompue, et doivent conduire à des indéterminations.

IV.

La situation d'un plan tangent est connue commodément par la position de la droite qui lui est normale au point A; cette droite est dite aussi, normale à cette surface courbe. Nous représenterons la direction de cette normale par le point L sur la surface de la sphère auxiliaire, et nous poserons

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z;$$

nous désignons par x, y, z les coordonnées du point A. Soient, de plus, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées d'un autre point A' pris sur la surface courbe; ds sa distance infiniment petite au point A; enfin λ le point de la surface sphérique représentant la direction de l'élément AA'. On aura aussi

$$dx = ds.\cos(1)\lambda, \quad dy = ds.\cos(2)\lambda, \quad dz = ds.\cos(3)\lambda,$$

et, puisque l'on doit avoir $\lambda L = 90$ degrés,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0.$$

De la combinaison de ces équations dérive

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

On a deux méthodes générales pour montrer le caractère d'une surface courbe. La *première* méthode se sert de l'équation entre les coordonnées x, y, z, que nous supposerons réduite à la forme $W = 0$, où W sera fonction des indéterminées x, y, z. Soit la différentielle complète de la fonction W,

$$dW = P\,dx + Q\,dy + R\,dz;$$

on aura, pour la surface courbe,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

et, par suite,

$$P.\cos(1)\lambda + Q.\cos(2)\lambda + R.\cos(3)\lambda = 0.$$

Comme cette équation, de même que celle que nous avons établie plus haut, doit avoir lieu pour les directions de tous les éléments ds sur la surface courbe, on verra facilement que X, Y, Z doivent être proportionnels à P, Q, R, et, par suite, comme $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, on aura, ou

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

ou

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

La *seconde* méthode exprime les coordonnées sous forme de fonctions de deux variables p et q. Supposons que, par la différentiation de ces fonctions, il vienne

$$dx = a\,dp + a'\,dq,$$
$$dy = b\,dp + b'\,dq,$$
$$dz = c\,dp + c'\,dq.$$

Par la substitution de ces valeurs dans la formule donnée

plus haut, on obtient

$$(aX + bY + cZ)dp + (a'X + b'Y + c'Z)dq = 0.$$

Comme cette équation doit avoir lieu indépendamment des valeurs des différentielles dp, dq, on devra avoir, évidemment,

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0;$$

d'où nous voyons que X, Y, Z doivent être proportionnels aux quantités

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'.$$

Ainsi, en posant, pour abréger,

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \Delta,$$

on aura, ou

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta},$$

ou

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}.$$

A ces deux méthodes générales, vient s'ajouter une *troisième*, dans laquelle une des coordonnées, z par exemple, se présente sous forme de fonction des deux autres x, y. Cette méthode n'est évidemment autre chose qu'un cas particulier de la première méthode ou de la seconde. Si l'on pose

$$dz = t\,dx + u\,dy,$$

on aura, ou

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}},$$

ou

$$X = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}.$$

V.

Les deux solutions trouvées dans l'article précédent se rapportent, évidemment, à des points opposés de la surface sphérique, ou à des directions opposées; ce qui est dans la nature même des choses, puisque l'on peut mener une normale aux deux faces (*plagæ*) d'une surface courbe. Si l'on veut distinguer entre elles ces deux régions, contiguës à sa surface, et appeler l'une *extérieure* et l'autre *intérieure*, nous pourrons attribuer à l'une et à l'autre normale sa solution convenable, au moyen du théorème développé dans le n° 7 du § II, et en même temps nous aurons un criterium pour distinguer une région de l'autre.

Dans la *première* méthode, ce criterium sera donné par le signe de la valeur de la quantité W. Généralement parlant, la surface courbe sépare les parties de l'espace pour lesquelles W a une valeur positive, des parties pour lesquelles la valeur de W devient négative. Mais ce théorème fait voir facilement que si W acquiert une valeur positive vers la face extérieure, et que l'on conçoive une normale menée en dehors, on devra adopter la première solution. Du reste, dans chaque cas, on jugera facilement si la même règle pour le signe de W a lieu pour la surface entière, ou si elle varie avec les différentes parties. Tant que les coefficients P, Q, R ont des valeurs finies, et ne deviennent pas nuls tous les trois à la fois, la loi de la continuité empêchera toute incertitude.

Si nous suivons la *deuxième* méthode, nous pouvons concevoir sur la surface courbe deux systèmes de lignes courbes : l'un, pour lequel p est variable et q constant; l'autre, pour lequel q est variable, p constant; la position mutuelle de ces lignes par rapport à la région extérieure, doit décider laquelle des solutions il faut adopter. Toutes les fois que les trois lignes suivantes, savoir, la

branche de la ligne du premier système qui partant de A croît avec p, la branche du second système partant de A et croissant avec q, et la normale menée vers le côté extérieur, sont placées d'une *manière semblable* à celle des axes des x, y, z à partir de l'origine des abscisses (par exemple, si, tant pour ces trois lignes que pour les trois autres, on peut concevoir la première dirigée vers la gauche, la deuxième vers la droite, et la troisième de bas en haut), la première solution doit être adoptée; mais chaque fois que la position mutuelle des trois premières lignes sera opposée à la position mutuelle des trois axes des x, y, z, la seconde solution aura lieu.

Dans la *troisième* méthode il faut voir si, quand z prend un accroissement positif, x et y ne changeant point, le passage se fait vers la région extérieure ou intérieure. Dans le premier cas, pour la normale dirigée vers l'extérieur, la première solution aura lieu; dans le second cas, la seconde.

VI.

De même qu'en transportant à la surface de la sphère la direction de la normale à la surface courbe, à chaque point déterminé de cette surface répond un point déterminé de la sphère; de même aussi une ligne quelconque, ou une figure quelconque sur la première surface, sera représentée par une ligne ou une figure correspondante sur la seconde. Dans la comparaison de deux figures se correspondant de cette manière mutuellement, dont l'une sera comme l'image de l'autre, deux points essentiels sont surtout à considérer : l'un, quand on n'a égard qu'à la quantité seulement; l'autre, quand, en faisant abstraction des relations quantitatives, on ne s'attache qu'à la seule position.

Le premier de ces points sera la base de quelques notions, qu'il paraît utile d'admettre dans la doctrine des

surfaces courbes. Savoir, à chaque partie de la surface courbe enfermée dans des limites déterminées, nous assignons une *courbure totale* ou *entière*, qui est exprimée par l'aire de la figure qui lui correspond sur la surface sphérique. Il faut distinguer avec soin de cette courbure totale, la courbure en quelque sorte spécifique, que nous appellerons *mesure de la courbure* : cette dernière est rapportée à un *point* de la surface, et désignera le quotient qu'on obtient quand on divise la courbure totale de l'élément superficiel adjacent au point par l'aire de cet élément, et, par conséquent, indique le rapport des aires infiniment petites qui se correspondent mutuellement sur la surface courbe et sur la surface sphérique. L'utilité de ces innovations sera abondamment justifiée, comme nous l'espérons, par ce que nous expliquerons par la suite. Quant à ce qui regarde la terminologie, nous nous sommes surtout attaché à écarter toute ambiguïté; c'est pourquoi nous n'avons pas jugé convenable de suivre strictement l'analogie de la terminologie ordinairement adoptée dans la doctrine des lignes courbes planes (quoique non approuvée de tous), suivant laquelle par la mesure de la courbure on eût dû entendre simplement la *courbure*, et par courbure entière, l'*amplitude*. Mais pourquoi se montrer difficile sur les mots, pourvu qu'il n'y ait pas vide d'idées, et que la diction ne donne pas lieu à une interprétation erronée?

La position de la figure sur la surface sphérique peut être semblable ou opposée (inverse) à la position de la figure correspondante sur la surface courbe : le premier cas a lieu, quand deux lignes sur la surface courbe, partant du même point dans des directions différentes, mais non opposées, sont représentées sur la surface de la sphère par des lignes semblablement placées, savoir, quand l'image de la ligne placée à droite est elle-même à droite;

dans le second cas, le contraire a lieu. Nous distinguerons ces deux cas par le *signe* positif ou négatif de la mesure de la courbure; mais évidemment cette distinction ne peut avoir lieu qu'autant que sur chaque surface nous prenons une région déterminée, dans laquelle on doit concevoir la figure. Dans la sphère auxiliaire, nous emploierons toujours la face extérieure, opposée au centre; dans la surface courbe, on peut aussi adopter la face extérieure, ou celle qui est considérée comme extérieure, ou plutôt la région à laquelle on conçoit élevée une normale : car évidemment, par rapport à la similitude des figures, rien n'est changé, si sur la surface courbe on transporte à la région opposée tant la figure que sa normale, pourvu que son image soit toujours peinte dans la même région de la surface sphérique.

Le signe positif ou négatif, que nous avons assigné à la mesure de la courbure pour la position d'une figure infiniment petite, nous l'étendons aussi à la courbure totale d'une figure finie sur la surface courbe. Si cependant nous voulons embrasser cette matière dans toute sa généralité, il est besoin de quelques éclaircissements, que nous ne ferons que toucher ici en passant. Quand la figure sur la surface courbe est de telle nature qu'à chacun des points dans son intérieur répond sur la surface de la sphère un point *différent*, la définition n'a pas besoin d'explication ultérieure. Mais chaque fois que cette condition n'a pas lieu, il sera nécessaire de faire entrer en compte deux ou plusieurs fois certaines parties de la figure sur la surface sphérique, d'où, pour une position semblable ou opposée, pourra naître une accumulation ou une destruction. Le plus simple, en pareil cas, est de concevoir la figure sur la surface courbe divisée en parties telles, que chacune, considérée isolément, satisfasse à la condition précédente, d'attribuer à chacune d'elles sa courbure

totale, en en déterminant la quantité par l'aire de la figure correspondante sur sa surface sphérique, et le signe par la position, et enfin d'assigner à la figure entière la courbure totale provenant de l'addition des courbures totales qui répondent aux différentes parties. Ainsi généralement la courbure totale d'une figure est égale à $\int k d\sigma$, en dénotant par $d\sigma$ l'élément de l'aire de la figure, et par k la mesure de la courbure en un point quelconque. Quant à ce qui appartient à la représentation géométrique de cette intégrale, ce qu'il y a de principal sur ce sujet revient à ce qui suit. Au contour de la figure sur la surface courbe (sous la restriction du § III) correspondra toujours sur la surface sphérique une ligne revenant sur elle-même. Si elle ne se coupe point elle-même en aucun endroit, elle partagera toute la surface sphérique en deux parties, dont l'une répondra à la figure sur la surface courbe, et dont l'aire (prise positivement ou négativement suivant que par rapport à son contour elle est placée d'une manière semblable à celle de la figure sur la surface courbe par rapport au sien, ou d'une manière inverse), donnera la courbure totale de cette dernière. Mais chaque fois que cette ligne se coupe elle-même une ou plusieurs fois, elle présentera une figure compliquée, à laquelle cependant on peut attribuer une aire déterminée avec autant de raison qu'aux figures sans nœuds; et cette aire, comprise comme elle doit l'être, donnera toujours une valeur exacte de la courbure totale. Nous nous réservons cependant de donner à une autre occasion une exposition plus étendue sur le sujet des figures conçues de la manière la plus générale.

VII.

Cherchons maintenant une formule pour exprimer la mesure de la courbure pour un point quelconque de la

surface courbe. En dénotant par $d\sigma$ l'aire d'un élément de cette surface, $Zd\sigma$ sera l'aire de la projection de cet élément sur le plan des coordonnées x, y; et, par suite, si $d\Sigma$ est l'aire de l'élément correspondant sur la surface sphérique, $Zd\Sigma$ sera l'aire de la projection sur le même plan : le signe positif ou négatif de Z indiquera que la situation de la projection est semblable ou opposée à la situation de l'élément projeté. Ces projections ont donc évidemment entre elles le même rapport quant à la quantité, et aussi le même rapport quant à leur situation, que les éléments eux-mêmes. Considérons maintenant un élément triangulaire sur la surface courbe, et supposons que les coordonnées des trois points, qui forment sa projection, sont

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x + dx, & y + dy, \\ x + \delta x, & y + \delta y. \end{array}$$

Le double de l'aire de ce triangle sera exprimé par la formule

$$dx.\delta y - dy.\delta x,$$

et sous une forme positive ou négative, suivant que la position du côté qui joint le premier point au troisième par rapport au côté qui joint le premier point au second est semblable, ou opposée à la position de l'axe des coordonnées y, par rapport à l'axe des coordonnées x.

Par conséquent, si les coordonnées de trois points, qui forment la projection de l'élément correspondant sur la surface sphérique, prises à partir du centre de la sphère, sont

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X + dX, & Y + dY, \\ X + \delta X, & Y + \delta Y, \end{array}$$

le double de l'aire de cette projection sera exprimé par

$$dX.\delta Y - dY.\delta X,$$

et le signe de cette expression se détermine de la même manière que ci-dessus. Donc la mesure de la courbure en ce lieu de la surface sera

$$k = \frac{dX.\delta Y - dY.\delta X}{dx.\delta y - dy.\delta x}.$$

Si nous supposons que la nature de la surface est donnée suivant le *troisième* mode considéré dans l'article IV, on aura X et Y sous forme de fonctions des quantités x et y; d'où

$$dX = \left(\frac{dX}{dx}\right) dx + \left(\frac{dX}{dy}\right) dy,$$

$$\delta X = \left(\frac{dX}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dX}{dy}\right) \delta y,$$

$$dY = \left(\frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dY}{dy}\right) dy,$$

$$\delta Y = \left(\frac{dY}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dY}{dy}\right) \delta y.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'expression précédente se change en celle-ci :

$$k = \left(\frac{dX}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dY}{dx}\right).$$

Posant, comme plus haut,

$$\frac{dz}{dx} = t, \quad \frac{dz}{dy} = u,$$

et, de plus,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = T, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = U, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = V,$$

ou

$$dt = T\,dx + U\,dy, \quad du = U\,dx + V\,dy,$$

nous aurons, d'après des formules données plus haut,

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1 + t^2 + u^2)Z^2 = 1,$$

et, de là,

$$dX = -Zdt - tdZ,$$
$$dY = -Zdu - udZ,$$
$$(1 + t^2 + u^2)dZ + Z(tdt + udu) = 0,$$

ou

$$dZ = -Z^3(tdt + udu),$$
$$dX = -Z^3(1 + u^2)dt + Z^3 tu\,du,$$
$$dY = +Z^3 tu\,dt - Z^3(1 + t^2)du,$$

et aussi

$$\frac{dX}{dx} = Z^3[-(1 + u^2)T + tuU],$$
$$\frac{dX}{dy} = Z^3[-(1 + u^2)U + tuV],$$
$$\frac{dY}{dx} = Z^3[tuT - (1 + t^2)U],$$
$$\frac{dY}{dy} = Z^3[tuU - (1 + t^2)V].$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il vient

$$k = Z^6(TV - U^2)(1 + t^2 + u^2) = Z^4(TV - U^2) = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2}.$$

VIII.

Par un choix convenable de l'origine et des axes des coordonnées, on peut faire facilement que, pour un point déterminé A, les valeurs des quantités t, u, U s'évanouissent. D'abord les deux premières conditions sont remplies, si l'on prend le plan tangent en ce point pour plan des coordonnées x, y. Si, de plus, on place l'ori-

gine en ce point, l'expression des coordonnées z acquiert évidemment cette forme,

$$z = \frac{1}{2} T^0 x^2 + U^0 xy + \frac{1}{2} V^0 y^2 + \Omega,$$

où Ω sera d'un ordre plus élevé que le second. Faisant ensuite tourner dans leur plan les axes des x, y d'un angle M, tel qu'on ait

$$\tan 2M = \frac{2U^0}{T^0 - V^0},$$

on voit facilement que l'équation prendra cette forme,

$$z = \frac{1}{2} T x^2 + \frac{1}{2} V y^2 + \Omega;$$

et l'on satisfait ainsi à la troisième condition. Cela fait, on voit que :

1. Si la surface courbe est coupée par un plan normal, et passant par l'axe des coordonnées x, le rayon de courbure de la section au point A sera égal à $\frac{1}{T}$, le signe positif ou négatif indiquant que la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers la région où les coordonnées z sont positives.

2. De la même manière, $\frac{1}{V}$ sera au point A le rayon de courbure d'une courbe plane, section de la surface courbe par le plan passant par le plan des y, z.

3. En posant $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, on a

$$z = \frac{1}{2}(T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi) r^2 + \Omega;$$

d'où l'on conclut que, si la section est faite par un plan normal en A à la surface, et faisant avec l'axe des x

l'angle φ, le rayon de courbure au point A sera égal à

$$\frac{1}{T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi}.$$

4. Chaque fois donc qu'on aura $T = V$, les rayons de courbure seront égaux dans *tous* les plans normaux. Mais, si T et V sont inégaux, il est évident, puisque, pour une valeur quelconque de l'angle φ, $T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi$ tombe entre T et V, que les rayons de courbure dans les sections principales, considérées dans les nos 1 et 2, se rapportent aux courbures extrêmes, savoir : l'un à la courbure maximum, l'autre à la courbure minimum, si T et V sont affectés du même signe; et, au contraire, l'un à la plus grande convexité, l'autre à la plus grande concavité, si T et V ont des signes contraires. Ces conclusions contiennent presque tout ce que l'illustre Euler nous a enseigné le premier sur la courbure des surfaces.

5. La mesure de la courbure de la surface en un point A prend l'expression très-simple $k = TV$, d'où nous avons :

Théorème. *La mesure de la courbure en un point quelconque d'une surface est égale à une fraction, dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le produit des deux rayons de courbures extrêmes dans les sections faites par les plans normaux.*

On voit en même temps que la mesure de la courbure est positive pour les surfaces concavo-concaves ou convexo-convexes (ce qui ne fait pas une différence essentielle), et négative pour les concavo-convexes. Si la surface est composée de parties de chaque espèce, sur leurs confins la mesure de la courbure devra s'annuler. On s'étendra plus longuement dans la suite sur la nature des surfaces courbes pour lesquelles la mesure de la courbure est partout nulle.

IX.

La formule générale pour la mesure de la courbure donnée à la fin de l'art. VII est de toutes la plus simple, puisqu'elle implique seulement cinq éléments; nous serons conduits à une formule plus compliquée, renfermant neuf éléments, si nous voulons employer la première manière d'exprimer la nature d'une surface (*). En conservant les notations de l'art. IV, nous poserons, de plus,

$$\frac{d^2W}{dx^2}=P', \quad \frac{d^2W}{dy^2}=Q', \quad \frac{d^2W}{dz^2}=R',$$
$$\frac{d^2W}{dy\,dz}=P'', \quad \frac{d^2W}{dx\,dz}=Q'', \quad \frac{d^2W}{dx\,dy}=R'',$$

de sorte qu'on ait

$$dP=P'\,dx+R''\,dy+Q''\,dz,$$
$$dQ=R''\,dx+Q'\,dy+P''\,dz,$$
$$dR=Q''\,dx+P''\,dy+R'\,dz.$$

Comme on a déjà $t=-\frac{P}{R}$, nous trouvons, par la différentiation,

$$R^2\,dt=-R\,dP+P\,dR=(PQ''-RP')\,dx+(PP''-RR'')\,dy$$
$$+(PR'-RQ'')\,dz,$$

ou, en éliminant dz à l'aide de l'équation

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0,$$
$$R^3\,dt=(-R^2P'+2PRQ''-P^2R')\,dx$$
$$+(PRP''+QRQ''-PQR'-R^2R'')\,dy.$$

On obtient, en outre, de la même manière,

$$R^3\,du=(PRP''+QRQ''-PQR'-R^2R'')\,dx$$
$$+(-R^2Q'+2QRP''-Q^2R')\,dy.$$

(*) Voir page 201.

Nous tirons de là,

$$R^3 T = -R^2 P' + 2PRQ'' - P^2 R',$$
$$R^3 U = PRP'' + QRQ'' + PQR' - R^2 R'',$$
$$R^3 V = -R^2 Q' + 2QRP'' - Q^2 R'.$$

En substituant ces valeurs dans la formule de l'art. VII, nous obtenons, pour la mesure de la courbure k, l'expression symétrique suivante,

$$(P^2 + Q^2 + R^2)^2 k = P^2(Q'R' - P''^2) + Q^2(P'R' - Q''^2)$$
$$+ R^2(P'Q' - R''^2) + 2QR(Q''R'' - P'P'')$$
$$+ 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'').$$

X.

On obtiendra une formule encore plus compliquée, composée de quinze éléments, en suivant la seconde méthode générale (*) pour exprimer la nature des surfaces courbes. Il est cependant très-important de l'élaborer aussi. En conservant les signes de l'art. IV, posons, en outre,

$$\frac{d^2x}{dp^2} = \alpha, \quad \frac{d^2x}{dp\,dq} = \alpha', \quad \frac{d^2x}{dq^2} = \alpha'',$$
$$\frac{d^2y}{dp^2} = \beta, \quad \frac{d^2y}{dp\,dq} = \beta', \quad \frac{d^2y}{dq^2} = \beta'',$$
$$\frac{d^2z}{dp^2} = \gamma, \quad \frac{d^2z}{dp\,dq} = \gamma', \quad \frac{d^2z}{dq^2} = \gamma''.$$

Faisons encore, pour abréger,

$$bc' - cb' = A,$$
$$ca' - ac' = B,$$
$$ab' - ba' = C.$$

On a d'abord

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

ou

$$dz = -\frac{A}{C}\,dx - \frac{B}{C}\,dy;$$

(*) Cette seconde methode est un système de coordonnées, longitudes et latitudes, généralisé. TM.

mais aussi, quand z est considérée comme fonction de x, y, on a

$$\frac{dz}{dx} = t = -\frac{A}{C},$$
$$\frac{dz}{dy} = u = -\frac{B}{C}.$$

Nous tirons de $dx = adp + a'dq$, $dy = bdp + b'dq$,

$$C\,dp = b'dx - a'dy,$$
$$C\,dq = -bdx + ady.$$

Les différentielles complètes de t et de u sont donc

$$C^3\,dt = \left(A\frac{dC}{dp} - C\frac{dA}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dA}{dq} - A\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady),$$
$$C^3\,du = \left(B\frac{dC}{dp} - C\frac{dB}{dp}\right)(b'dx - a'dy) + \left(C\frac{dB}{dq} - B\frac{dC}{dq}\right)(bdx - ady).$$

Si maintenant, dans ces formules, nous substituons

$$\frac{dA}{dp} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma,$$
$$\frac{dA}{dq} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma',$$
$$\frac{dB}{dp} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha,$$
$$\frac{dB}{dq} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha',$$
$$\frac{dC}{dp} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta,$$
$$\frac{dC}{dq} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta',$$

et si nous considérons que les valeurs des différentielles dt, du, ainsi obtenues, doivent être respectivement égales, indépendamment des différentielles dx, dy, aux quantités $T dx + U dy$, $U dx + V dy$, nous trouverons, après quelques transformations qui se présentent assez

naturellement,

$$C^3T = \alpha A b'^2 + \beta B b'^2 + \gamma C b'^2$$
$$- 2\alpha' A bb' - 2\beta' B bb' - 2\gamma' C bb'$$
$$+ \alpha'' A b^2 + \beta'' B b^2 + \gamma'' C b^2,$$

$$C^3U = - \alpha A a'b' - \beta B a'b' - \gamma C a'b'$$
$$+ \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba')$$
$$- \alpha'' A ab - \beta'' B ab - \gamma'' C ab,$$

$$C^3V = \alpha A a'^2 + \beta B a'^2 + \gamma C a'^2$$
$$- 2\alpha' A aa' - 2\beta' B aa' - 2\gamma' C aa'$$
$$+ \alpha'' A a^2 + \beta'' B a^2 + \gamma'' C a^2.$$

Si donc, pour abréger, nous posons

(1) $$A\alpha + B\beta + C\gamma = D,$$
(2) $$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D',$$
(3) $$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'',$$

on a

$$C^3T = D b'^2 - 2D' bb' + D'' b^2,$$
$$C^3U = - D a'b' + D'(ab' + ba') - D'' ab,$$
$$C^3V = D a'^2 - 2D' aa' + D'' a^2.$$

De là, en faisant le développement,

$$C^6(TV - U^2) = (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2)C^2,$$

et, par conséquent, la formule, pour la mesure de la courbure,

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

XI.

A l'aide de la formule que nous venons de trouver, nous en établirons une autre, qui doit être rangée parmi les théorèmes les plus féconds dans la doctrine des surfaces courbes. Introduisons les notations suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = E,$$
$$aa' + bb' + cc' = F,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = G,$$

(4) $$a\alpha + b\beta + c\gamma = m,$$
(5) $$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m',$$
(6) $$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'',$$
(7) $$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n,$$
(8) $$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n',$$
(9) $$a'a'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'',$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta.$$

Éliminons des équations (1), (4), (7) les quantités β, γ, ce que nous ferons en les multipliant par $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB' - bC$; et les ajoutant, il viendra

$$[A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC)]\alpha$$
$$= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC),$$

équation que nous transformons facilement en celle-ci,

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

De la même manière, l'élimination des quantités α, γ ou α, β des mêmes équations, donne

$$BD = \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE),$$
$$CD = \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE).$$

En multipliant ces trois équations par α'', β'', γ'', et les ajoutant, on obtient

(10) $$\left\{ \begin{aligned} DD'' = {} & (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta \\ & + m''(nF - mG) + n''(mF - nE). \end{aligned} \right.$$

Si nous traitons de la même manière les équations (2), (5), (8), il vient

$$AD' = \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E),$$
$$BD' = \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E),$$
$$CD' = \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E);$$

ces équations étant multipliées par α', β', γ', leur addition donne

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

La combinaison de cette équation avec l'équation (10) donne

$$DD'' - D'^2 = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\Delta$$
$$+ E(n'^2 - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm'').$$

Il est évident qu'on a

$$\frac{dE}{dp} = 2m, \quad \frac{dE}{dq} = 2m', \quad \frac{dF}{dp} = m' + n, \quad \frac{dF}{dq} = m'' + n',$$
$$\frac{dG}{dp} = 2n', \quad \frac{dG}{dq} = 2n'',$$

ou

$$m = \frac{1}{2}\frac{dE}{dp}, \quad m' = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad m'' = \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp},$$
$$n = \frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \quad n' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \quad n'' = \frac{1}{2}\frac{dG}{dq}.$$

D'ailleurs on peut facilement s'assurer qu'on a

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2F}{dp.dq} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2G}{dp^2}.$$

Si nous substituons ces diverses expressions dans la formule que nous avons trouvée à la fin de l'article précédent pour la mesure de la courbure, nous parvenons à la formule suivante, qui ne contient que les seules quantités E, F, G, et leurs quotients différentiels du premier et du second ordre,

$$4(EG - F^2)^2 k = E\left[\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right]$$
$$+ F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right)$$
$$+ G\left[\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right]$$
$$- 2(EG - F^2)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\frac{d^2F}{dp.dq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right).$$

XII.

Comme on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp.dq + G\,dq^2,$$

on voit que $\sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp.dq + G\,dq^2}$ est l'expression générale de l'élément linéaire sur une surface courbe. L'analyse développée dans l'article précédent nous apprend ainsi que, pour trouver la mesure de la courbure, on n'a pas besoin des formules finies, qui donnent les coordonnées x, y, z comme des fonctions des indéterminées p, q, mais qu'il suffit de l'expression générale de la grandeur d'un élément linéaire quelconque. Procédons à quelques applications de cet important théorème.

Supposons que notre surface courbe puisse être développée sur une autre surface, courbe ou plane, de façon qu'à chaque point de la première surface, déterminé par les coordonnées x, y, z, réponde un point déterminé de la seconde surface, dont les coordonnées soient x', y', z'. Évidemment x', y', z' pourront aussi être considérées comme des fonctions des indéterminées p, q, d'où viendra, pour l'élément $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$, l'expression

$$\sqrt{E'\,dp^2 + 2F'\,dp.dq + G'\,dq^2},$$

E', F', G' désignant aussi des fonctions de p, q. Mais on voit, par la notion même du *développement* d'une surface sur une surface, que les éléments correspondants sur les deux surfaces sont nécessairement égaux, et qu'ainsi on a identiquement

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G';$$

donc la formule de l'article précédent conduit spontanément à ce beau théorème :

Théorème. *Si une surface courbe est développée sur*

une autre surface quelconque, la mesure de la courbure en chaque point reste invariable.

Évidemment aussi, *une partie quelconque finie d'une surface courbe, après son développement sur une autre surface courbe, conservera la même courbure totale.*

Le cas spécial, auquel les géomètres ont restreint jusqu'ici leurs recherches, consiste dans les surfaces développables sur un plan. Notre théorie apprend spontanément que la mesure de la courbure de telles surfaces en un point quelconque est zéro; par conséquent, si leur nature est exprimée suivant la troisième méthode, on aura partout

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2=0.$$

Ce critérium, quoique bien connu, n'est pas démontré la plupart du temps, à notre avis du moins, avec la rigueur qu'on pourrait désirer.

XIII.

Ce que nous avons exposé dans l'article précédent se rattache à une manière particulière de considérer les surfaces, digne au plus haut point d'être cultivée avec soin par les géomètres. Quand l'on considère une surface non comme la limite d'un solide, mais comme un solide flexible quoique inextensible, dont une des dimensions est regardée comme évanouissante, les propriétés de la surface dépendent, en partie de la forme à laquelle on la conçoit réduite, en partie sont absolues, et restent invariables, suivant quelque forme qu'on la fléchisse. C'est à ces dernières propriétés, dont la recherche ouvre à la géométrie un champ nouveau et fertile, que doivent être rapportées la mesure de la courbure et la courbure totale, dans le sens que nous avons donné à ces expressions; à elles aussi appartiennent la doctrine des lignes les plus courtes, et la

plus grande partie de ce que nous nous réservons de traiter plus tard.

Dans ce genre de considérations, une surface plane et une surface développable sur un plan, par exemple une surface cylindrique, conique, etc., sont regardées comme essentiellement identiques, et la manière naturelle d'exprimer généralement le caractère de la surface ainsi considérée est toujours fondée sur la formule

$$\sqrt{\mathrm{E}\,dp^2 + 2\mathrm{F}\,dp\,.\,dq + \mathrm{G}\,dq^2},$$

qui lie l'élément linéaire aux deux indéterminées p, q. Mais, avant de poursuivre ultérieurement ce sujet, il faut s'occuper d'abord des principes de la théorie des *lignes de plus courte distance* sur une surface courbe.

XIV.

La nature d'une ligne courbe dans l'espace est donnée généralement de telle sorte, que les coordonnées x, y, z répondant à ses divers points, se présentent sous la forme de fonctions d'une variable que nous dénoterons par w. La longueur d'une telle ligne, depuis un point initial arbitraire jusqu'au point dont les coordonnées sont x, y, z, est exprimée par l'intégrale

$$\int dw\,.\sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Si l'on suppose que la position de la ligne courbe éprouve une variation infiniment petite, de façon que les coordonnées des divers points reçoivent les variations δx, δy, δz, on trouve la variation de toute la longueur

$$= \int \frac{dx\,.\,d\delta z + dy\,.\,d\delta y + dz\,.\,d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

expression que nous changeons en cette forme,

$$\frac{dx.\delta x + dy.\delta y + dz.\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$-\int \left\{ \begin{array}{l} \delta x . d \dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \delta y . d \dfrac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\ + \delta z . d \dfrac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \end{array} \right\}.$$

Dans le cas où la ligne est la plus courte entre ses points extrêmes, on sait que tout ce qui se trouve sous le signe intégral doit s'évanouir. Quand la ligne doit être sur une surface donnée par l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

les variations δx, δy, δz doivent satisfaire aussi à l'équation

$$P\,\delta x + Q\,\delta y + R\,\delta z = 0;$$

d'où, par des principes connus, on voit facilement que les différentielles

$$d.\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad d.\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}, \quad d.\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

doivent être respectivement proportionnelles aux quantités P, Q, R. Soient maintenant dr l'élément d'une ligne courbe, λ un point sur la surface de la sphère représentant la direction de cet élément, L un point sur la surface de la sphère représentant la direction de la normale à la surface courbe; soient enfin ξ, η, ζ les coordonnées du point λ, et X, Y, Z les coordonnées du point L par rapport au centre de la sphère. On aura ainsi

$$dx = \xi\,dr, \quad dy = \eta\,dr, \quad dz = \zeta\,dr;$$

d'où il résulte que les différentielles ci-dessus deviennent $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$. Et comme les quantités P, Q, R sont proportionnelles à X, Y, Z, le caractère de la ligne de plus courte distance consiste dans les équations

$$\frac{d\xi}{X}=\frac{d\eta}{Y}=\frac{d\zeta}{Z}.$$

Du reste, on voit facilement que $\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}$ est égal, sur la surface sphérique, au petit arc qui mesure l'angle compris entre les directions des tangentes, au commencement et à la fin de l'élément dr, et que, par suite, il est égal à $\frac{dr}{\rho}$, si ρ dénote le rayon de courbure en ce lieu de la courbe la plus courte. On aura ainsi

$$\rho d\xi = X dr, \quad \rho d\eta = Y dr, \quad \rho d\zeta = Z dr.$$

XV.

Supposons que sur la surface courbe, il parte d'un point donné A une multitude de courbes de plus courte distance, que nous distinguerons entre elles par l'angle que forme le premier élément de chacune d'elles avec le premier élément de l'une de ces lignes prise pour la première; soient φ cet angle, ou plus généralement une fonction de cet angle, et r la longueur de la ligne la plus courte du point A jusqu'au point dont les coordonnées sont x, y, z. Comme, à des valeurs déterminées des variables r, φ, répondent des points déterminés de la surface, les coordonnées x, y, z peuvent être considérées comme des fonctions de r, φ. Nous conserverons d'ailleurs la même signification que dans l'article précédent aux notations λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z, de façon à les rapporter généralement à un point quelconque d'une quelconque des lignes de plus courte distance.

Toutes les lignes de plus courte distance, qui sont d'une

égale longueur r, se termineront à une autre ligne, dont nous désignerons par ν la longueur comptée d'une origine arbitraire. On pourra ainsi considérer ν comme une fonction des indéterminées r, φ; et si nous désignons par λ' un point sur la surface de la sphère correspondant à la direction de l'élément $d\nu$, et par ξ', η', ζ' les coordonnées de ce point par rapport au centre de la sphère, nous aurons

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi' \cdot \frac{d\nu}{d\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \eta' \cdot \frac{d\nu}{d\varphi}, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \zeta' \cdot \frac{d\nu}{d\varphi}.$$

De là et de

$$\frac{dx}{dr} = \xi, \quad \frac{dy}{dr} = \eta, \quad \frac{dz}{dr} = \zeta,$$

il suit

$$\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\frac{d\nu}{d\varphi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{d\nu}{d\varphi}.$$

Désignons le premier membre de cette équation, qui sera aussi fonction de r, φ, par S; sa différentiation suivant r donne

$$\frac{dS}{dr} = \frac{d^2x}{dr^2} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d^2y}{dr^2} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d^2z}{dr^2} \cdot \frac{dz}{d\varphi}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d\left[\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]}{d\varphi}$$

$$= \frac{d\xi}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d\eta}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \frac{1}{2} \frac{d(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{d\varphi}.$$

Mais $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$; par suite, sa différentielle est égale à zéro, et, par l'article précédent, nous avons, si ρ désigne toujours le rayon de courbure dans la ligne r,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\rho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\rho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\rho}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\rho}\cdot(X\xi' + Y\eta' + Z\zeta')\cdot\frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\rho}\cdot\cos L\lambda'\cdot\frac{dv}{d\varphi} = 0,$$

puisque λ' est situé sur le grand cercle dont le pôle est L. De là nous concluons que S est indépendant de r, et, par conséquent, fonction seulement de φ; mais pour $r = 0$, il est évident qu'on a $v = 0$, par conséquent aussi $\frac{dv}{d\varphi} = 0$, et $S = 0$ indépendamment de φ. Ainsi, nécessairement, on devra avoir généralement $S = 0$, et aussi $\cos\lambda\lambda' = 0$, c'est-à-dire $\lambda\lambda' = 90°$. De là nous tirons :

Théorème. — *Si l'on mène sur une surface courbe d'un même point initial une multitude de lignes de plus courte distance de même longueur, la ligne qui joindra leurs extrémités sera normale à chacune d'elles.*

Nous avons tenu à déduire ce théorème de la propriété fondamentale des lignes de plus courte distance. Du reste, on peut se convaincre de sa vérité, sans aucun calcul, par le raisonnement suivant : Soient AB, AB′ deux lignes de plus courte distance de même longueur, comprenant en A un angle infiniment petit ; et supposons que l'un des angles de l'élément BB′ avec les lignes BA, BA′ diffère d'une quantité finie de l'angle droit, d'où, par la loi de la continuité, l'un sera plus grand, l'autre moindre que l'angle droit. Supposons que l'angle en $B = 90° - \omega$, et prenons sur la ligne AB un point C, tel qu'on ait

$$BC = BB' . \operatorname{cosec}\omega.$$

Comme on peut considérer le triangle infiniment petit BB′C comme plan, on aura

$$CB' = BC . \cos\omega,$$

et, par suite,

$$AC + CB' = AC + BC . \cos\omega = AB - BC . (1 - \cos\omega)$$
$$= AB' - BC . (1 - \cos\omega),$$

c'est-à-dire le passage du point A à B' par le point C plus court que la ligne de plus courte distance ; ce qui est absurde.

XVI.

Au théorème de l'article précédent, nous associons un autre théorème, que nous énonçons ainsi : *Si, sur une surface courbe, on conçoit une ligne quelconque, de chacun des points de laquelle partent, sous des angles droits et vers la même région, une quantité innombrable de lignes de plus courte distance de même longueur, la courbe qui joindra leurs autres extrémités, les coupera toutes sous des angles droits.* Pour le démontrer, on n'a rien à changer à l'analyse précédente, si ce n'est que φ doit désigner la longueur de la courbe *donnée* comptée d'un point arbitraire, ou, si l'on aime mieux, une fonction de cette longueur. Ainsi, tous les raisonnements auront également lieu, avec cette modification, que la vérité de l'équation $S = o$ pour $r = o$ est maintenant comprise dans l'hypothèse même. Du reste, cet autre théorème est plus général que le précédent, qu'il peut aussi être censé comprendre, si pour ligne donnée nous adoptons un cercle infiniment petit décrit autour de A comme centre. Enfin, nous avertissons qu'ici encore des considérations géométriques peuvent tenir lieu de l'analyse. Comme elles se présentent assez naturellement, nous ne nous y arrêterons pas.

XVII.

Revenons à la formule $\sqrt{E dp^2 + 2 F dp . dq + G dq^2}$, qui exprime généralement la grandeur de l'élément linéaire sur une surface courbe, et, avant tout, examinons la signification géométrique des coefficients E, F, G. Déjà, dans l'art. V, nous avons averti qu'on peut concevoir, sur la surface courbe, deux systèmes de lignes : l'un,

pour lequel p seul est variable, q constant; l'autre, dans lequel q seul est variable, p constant. Un point quelconque de la surface peut donc être considéré comme l'intersection d'une ligne du premier système avec une ligne du second; et alors l'élément de la première ligne adjacente à ce point, et répondant à la variation dp, sera égal à $\sqrt{E}.dp$; et l'élément de la seconde ligne répondant à la variation dq sera égal à $\sqrt{G}.dq$; enfin, en désignant par ω l'angle compris entre ces éléments, on voit facilement que $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Et l'aire de l'élément du parallélogramme compris sur la surface courbe entre deux lignes du premier système, auxquelles répondent q, $q+dq$, et deux lignes du second système, auxquelles répondent p, $p+dp$, sera $\sqrt{EG-F^2}.dp.dq$.

Une ligne quelconque sur la surface courbe, n'appartenant à aucun de ces systèmes, prend naissance quand p et q sont regardés comme fonctions d'une variable nouvelle, ou l'une comme fonction de l'autre. Soit s la longueur d'une telle courbe comptée d'une origine arbitraire, et vers une direction quelconque regardée comme positive. Désignons par θ l'angle fait par l'élément $ds = \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp.dq + G\,dq^2}$ avec une ligne du premier système menée par l'origine de l'élément, et, pour ne laisser aucune ambiguïté, nous supposerons que cet angle part toujours de cette branche de la ligne pour laquelle les valeurs de p augmentent, et qu'on le prend positivement du côté vers lequel les valeurs de q augmentent. Cela ainsi compris, on voit facilement qu'on a

$$\cos\theta \,.\, ds = \sqrt{E}\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\,\cos\omega\,.\,dq = \frac{E\,dp + F\,dq}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\theta\,.\,ds = \sqrt{G}\,.\,\sin\omega\,.\,dq = \frac{\sqrt{EG-F^2}\,.\,dq}{\sqrt{E}}.$$

XVIII.

Nous chercherons maintenant quelle est la condition pour que cette ligne soit la plus courte. Puisque la longueur de s est exprimée par l'intégrale

$$s = \int \sqrt{E\,dp^2 + 2\,F\,dp\,.\,dq + G\,dq^2},$$

la condition du minimum exige que la variation de cette intégrale, venant d'un changement infiniment petit dans la situation de cette ligne, devienne zéro. Le calcul, pour cette recherche, se fait plus commodément dans ce cas, si nous considérons p comme fonction de q. Cela fait, si la variation est désignée par la caractéristique δ, nous avons

$$\delta s = \int \frac{\left(\frac{dE}{dp}\cdot dp^2 + \frac{2\,dF}{dp}\cdot dp\,.\,dq + \frac{dG}{dp}\cdot dq^2\right)\delta p + (2\,E\,dp + 2\,F\,dq)\,d\delta p}{2\,ds}$$

$$= \frac{E\,dp + F\,dq}{ds}\cdot \delta p$$

$$+ \int \delta p \left(\frac{\frac{dE}{dp}\cdot dp^2 + \frac{2\,dF}{dp}\cdot dp\,.\,dq + \frac{dG}{dp}\cdot dq^2}{2\,ds} - d\,.\,\frac{E\,dp + F\,dq}{ds} \right),$$

et l'on sait que l'expression sous le signe intégral doit s'évanouir indépendamment de p. On a ainsi

$$\frac{dE}{dp}\cdot dp^2 + \frac{2\,dF}{dp}\cdot dp\,.\,dq + \frac{dG}{dp}\cdot dq^2 = 2\,ds\,.\,d\,\frac{E\,dp + F\,dq}{ds}$$

$$= 2\,ds\,.\,d\,.\,\sqrt{E}\cos\theta = \frac{ds\,.\,d\,E\,.\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2\,ds\,.\,d\theta\,.\,\sqrt{E}\,.\sin\theta$$

$$= \frac{(E\,dp + F\,dq)\,dE}{E} - 2\sqrt{EG - F^2}\,.\,dq\,.\,d\theta$$

$$= \left(\frac{E\,dp + F\,dq}{E}\right)\cdot\left(\frac{dE}{dp}\,dp + \frac{dE}{dq}\,dq\right) - 2\sqrt{EG - F^2}\,.\,dq\,.\,d\theta.$$

De là nous tirons, pour la ligne la plus courte, l'équa-

tion de condition suivante :

$$\sqrt{EG - F^2}.d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\cdot\frac{dE}{dp}.dp + \frac{1}{2}\frac{F}{E}\cdot\frac{dE}{dq}.dq + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}\cdot dp - \frac{dF}{dp}.dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}.dq,$$

qu'on peut aussi écrire ainsi :

$$\sqrt{EG - F^2}.d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}.dE + \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}.dp - \frac{dF}{dp}.dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}.dq.$$

Du reste, à l'aide de l'équation

$$\cot\theta = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}\cdot\frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}},$$

on peut éliminer, de la précédente équation, l'angle θ, et développer ainsi l'équation différentielle du second ordre entre p et q, qui se trouverait cependant plus compliquée et moins utile pour les applications que la précédente.

XIX.

Les formules générales que nous avons trouvées pour la mesure de la courbure et pour la variation de direction de la ligne de plus courte distance dans les art. XI, XVIII, deviennent beaucoup plus simples, si les quantités p, q sont choisies de telle sorte que les lignes du premier système coupent toujours orthogonalement les lignes du second système, c'est-à-dire de telle sorte, qu'on ait généralement $\omega = 90^\circ$ ou $F = 0$. Alors on a, pour la mesure de la courbure,

$$4E^2G^2k = E.\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} + E\left(\frac{dG}{dp}\right)^2 + G.\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} + G.\left(\frac{dE}{dq}\right)^2 - 2EG\left(\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2G}{dp^2}\right),$$

et, pour la variation de l'angle θ,

$$\sqrt{EG}.d\theta = \frac{1}{2}\frac{dE}{dq}.dp - \frac{1}{2}\frac{dG}{dp}\cdot dq.$$

Parmi les divers cas dans lesquels a lieu cette condition d'orthogonalité, tient le premier rang celui où toutes les lignes de l'un ou l'autre système, par exemple du premier, sont des lignes de plus courte distance. Là, en effet, pour une valeur constante de q, l'angle θ devient zéro; d'où l'équation qu'on vient de donner pour la variation de θ montre qu'on doit avoir $\frac{dE}{dq} = 0$, ou que le coefficient E doit être indépendant de q, c'est-à-dire que E doit être ou constant ou fonction seulement de p. Le plus simple sera d'adopter pour p la longueur même de chaque ligne du premier système, et même chaque fois que toutes les lignes du premier système concourent en un point, de compter cette longueur de ce point, ou, s'il n'y a pas de commune intersection, d'une ligne quelconque du second système. Ceci compris, on voit que p et q désignent maintenant les mêmes quantités que, dans les art. XV, XVI, nous avions exprimées par r et φ, et qu'on a $E = 1$. Ainsi, les deux formules précédentes se transforment en celles-ci:

$$4\,G^2 k = \left(\frac{dG}{dp}\right)^2 - 2\,G\,\frac{d^2G}{dp^2},$$

$$\sqrt{G}\,.\,d\theta = -\frac{1}{2}\,\frac{dG}{dp}\,.\,dq,$$

ou, en posant $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{d^2m}{dp^2},\qquad d\theta = -\frac{dm}{dp}\,.\,dq.$$

Généralement parlant, m sera fonction de p, q, et $m\,dq$ l'expression de l'élément d'une ligne quelconque du second système. Mais dans le cas particulier où toutes les lignes p partent du même point, évidemment, pour $p = 0$, on doit avoir $m = 0$; donc si, dans ce cas, nous adoptons pour q l'angle même que le premier élément d'une ligne quelconque du premier système fait avec l'élément de

l'une d'elles arbitrairement choisie, comme pour une valeur infiniment petite de p, l'élément d'une ligne du second système (qu'on peut considérer comme un cercle décrit du rayon p), est égal à $p\,dq$, on aura, pour une valeur infiniment petite de p, $m = p$, et ainsi, pour $p = 0$, on aura en même temps $m = 0$ et $\frac{dm}{dp} = 1$.

XX.

Arrêtons-nous encore à la même supposition, savoir, que p désigne la longueur de la ligne la plus courte, menée d'un point déterminé A à un point quelconque de la surface, et q l'angle que le premier élément de cette ligne fait avec le premier élément d'une autre ligne donnée de plus courte distance, partant de A. Soient B un point déterminé sur cette ligne pour laquelle $q = 0$, et C un autre point déterminé de la surface, pour lequel nous désignerons simplement par A la valeur de q. Supposons les points B et C joints par la ligne la plus courte, dont les parties, comptées du point B, seront désignées, comme dans l'art. XVIII, par s, et, comme dans ce même article, θ désignera l'angle qu'un élément quelconque ds fait avec l'élément dp; soient enfin θ^0, θ' les valeurs de l'angle θ aux points B et C. Nous avons ainsi sur la surface courbe un triangle formé par des lignes de plus courte distance, dont les angles en B et C, que nous désignerons simplement par ces mêmes lettres, seront égaux, l'un au complément de θ^0 à 180 degrés, l'autre à l'angle θ'. Mais comme il est facile de voir, par notre analyse, que tous les angles sont exprimés, non en degrés, mais en nombres, de façon que l'angle $57°\,17'\,45''$, auquel correspond l'arc égal au rayon, est pris pour unité, on doit poser, en désignant par 2π la circonférence du cercle,

$$\theta^0 = \pi - B, \quad \theta' = C.$$

Cherchons maintenant la courbure totale de ce triangle, qui est égale à $\int k d\sigma$, $d\sigma$ désignant l'élément superficiel du triangle; et comme cet élément est exprimé par $mdp.dq$, il faut prendre l'intégrale $\int\int kmdp.dq$ pour toute la surface du triangle. Commençons par l'intégration suivant p, laquelle, à cause de $k = -\frac{1}{m}\cdot\frac{d^2m}{dp^2}$, donne $dq.\left(\text{const.} - \frac{dm}{dp}\right)$ pour la courbure totale de l'aire située entre les lignes du premier système auxquelles correspondent les valeurs de la seconde indéterminée $q, q + dq$. Comme cette courbure doit devenir nulle pour $p = 0$, la quantité constante introduite par l'intégration doit être égale à la valeur de $\frac{dm}{dp}$ pour $p = 0$, c'est-à-dire à l'unité. Nous avons ainsi $dq.\left(1 - \frac{dm}{dp}\right)$, où il faut prendre pour $\frac{dm}{dp}$ la valeur correspondante à la fin de cette aire sur la ligne CB. Mais, dans cette ligne, on a, par le paragraphe précédent,

$$\frac{dm}{dp}\cdot dq = -d\theta,$$

d'où notre expression se change en $dq + d\theta$. Par une seconde intégration prise depuis $q = 0$ jusqu'à $q = A$, nous obtenons la courbure totale du triangle

$$= A + \theta' - \theta^{\circ} = A + B + C - \pi.$$

La courbure totale est égale à l'aire de cette partie de la surface sphérique qui correspond au triangle, affectée du signe positif ou négatif, suivant que la surface courbe, sur laquelle est situé le triangle, est concavo-concave ou concavo-convexe; pour unité d'aire, on doit prendre le carré, dont le côté est l'unité (le rayon de la sphère), et, par suite, la surface totale de la sphère égale 4π. La partie de la surface sphérique correspondante au triangle est ainsi, à la surface entière de la sphère, comme $\pm (A + B + C - \pi)$

est à 4π. Ce théorème, qu'on doit regarder, si nous ne nous trompons, comme un des plus élégants de la théorie des surfaces courbes, peut aussi être énoncé de la manière suivante :

L'excès sur 180 *degrés de la somme des angles d'un triangle formé sur une surface courbe concavo-concave par des lignes de plus courte distance, ou la différence à* 180 *degrés de la somme des angles d'un triangle formé sur une surface courbe concavo-convexe par des lignes de plus courte distance, a pour mesure l'aire de la partie de la surface sphérique qui correspond à ce triangle, par les directions des normales, pourvu qu'on égale la surface entière à* 720 *degrés.*

Plus généralement, dans un polygone quelconque de n côtés, formés chacun par des lignes de plus courte distance, l'excès de la somme des angles sur $(2n-4)$ droits, ou la différence à $(2n-4)$ droits (suivant la nature de la surface courbe), est égal à l'aire du polygone correspondant sur la surface de la sphère, comme il découle spontanément du théorème précédent par le partage du polygone en triangles.

XXI.

Rendons aux lettres p, q, E, F, G, π les significations générales que nous leur avions données plus haut, et supposons, en outre, que la nature de la surface courbe est déterminée d'une manière semblable par deux autres variables p', q', dans laquelle l'élément linéaire s'exprime par

$$\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp'.dq' + G'dq'^2}.$$

Ainsi, à un point quelconque de la surface défini par des valeurs déterminées des variables p, q, répondront des valeurs déterminées des variables p', q'; celles-ci seront

donc fonctions de p, q, et nous supposerons qu'on obtient, par leur différentiation,

$$dp' = \alpha dp + \beta dq,$$
$$dq' = \gamma dp + \delta dq.$$

Proposons-nous de chercher la signification géométrique de ces coefficients α, β, γ, δ.

On peut ainsi concevoir maintenant sur la surface courbe *quatre* systèmes de lignes pour lesquelles q, p, q', p' sont respectivement constantes. Si par le point déterminé auquel répondent les valeurs p, q, p', q' des variables, nous supposons qu'on mène quatre lignes appartenant à chacun de ces systèmes, aux variations positives dp, dq, dp', dq' répondront les éléments

$$\sqrt{E}.dp, \quad \sqrt{G}.dq, \quad \sqrt{E'}.dp', \quad \sqrt{G'}.dq'.$$

Nous désignerons les angles que les directions de ces éléments font avec une direction fixe arbitraire, par M, N, M′, N′, en comptant dans le sens où est placée la seconde par rapport à la première, de façon que sin (N — M) soit une quantité positive : nous supposerons (ce qui est permis) que la quatrième est placée dans le même sens par rapport à la troisième, de façon que sin (N′ — M′) soit aussi une quantité positive. Cela compris ainsi, si nous considérons un autre point, infiniment peu distant du premier, auquel correspondent les valeurs $p+dp$, $q+dp$, $p'+dp'$, $q'+dq'$ des variables, avec un peu d'attention nous reconnaîtrons qu'on a en général, c'est-à-dire indépendamment des valeurs des variations dp, dq, dp', dq',

$$\sqrt{E}.dp.\sin M + \sqrt{G}.dq.\sin N = \sqrt{E'}.dp'.\sin M' + \sqrt{G'}.dq'.\sin N',$$

puisque chacune de ces expressions n'est autre chose que la distance du nouveau point à la ligne à partir de laquelle commencent les angles des directions. Mais nous avons, par la notation déjà introduite plus haut, $N - M = \omega$.

et, par analogie, nous poserons $N' - M' = \omega'$, et, de plus, $N - M' = \psi$. L'équation que nous venons de trouver peut ainsi se mettre sous la forme suivante :

$$\sqrt{E}.dp.\sin(M' - \omega + \psi) + \sqrt{G}.dq.\sin(M' + \psi)$$
$$= \sqrt{E'}.dp'.\sin M' + \sqrt{G'}.dq'.\sin(M' + \omega'),$$

ou sous celle-ci :

$$\sqrt{E}.dp.\sin(N' - \omega - \omega' + \psi) + \sqrt{G}.dq.\sin(N' - \omega' + \psi)$$
$$= \sqrt{E'}.dp'.\sin(N' - \omega') + \sqrt{G'}.dq'.\sin N'.$$

Et comme l'équation doit évidemment être indépendante de la direction initiale, on peut prendre celle-ci à volonté. En posant ainsi dans la seconde forme $N' = 0$, ou dans la première $M' = 0$, nous obtenons les équations suivantes :

$$\sqrt{E'}.\sin\omega'.dp' = \sqrt{E}.\sin(\omega + \omega' - \psi).dp + \sqrt{G}.\sin(\omega' - \psi).dq,$$
$$\sqrt{G'}.\sin\omega'.dq' = \sqrt{E}.\sin(\psi - \omega)\ dp + \sqrt{G}.\sin\psi.dq;$$

comme ces équations doivent être identiques avec celles-ci,

$$dp' = \alpha.dp + \beta.dp,$$
$$dq' = \gamma.dp + \delta.dq,$$

elles donneront la détermination suivante des coefficients α, β, γ, δ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}}.\frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin\omega'}, \quad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}}.\frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin\omega'},$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}}.\frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin\omega'}, \quad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}}.\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}.$$

On doit leur adjoindre les équations

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos\omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$
$$\sin\omega = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \quad \sin\omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{E'G'}}.$$

Par suite, les quatre équations peuvent aussi être présentées ainsi :

$$\alpha\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG'} \, . \sin(\omega + \omega' - \psi),$$
$$\beta\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GG'} \, . \sin(\omega' - \psi),$$
$$\gamma\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EE'} \, . \sin(\psi - \omega),$$
$$\delta\sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GE'} \; \sin\psi.$$

Comme, par les substitutions $dp' = \alpha . dp + \beta . dq$, $dq' = \gamma . dp + \delta . dq$, le trinôme

$$E' dp'^2 + 2F' dp' . dq' + G' dq'^2$$

doit se changer en $E dp^2 + 2F dp . dq + G dq^2$, on obtient facilement

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2;$$

et comme, *vice versâ*, le second trinôme doit se changer de nouveau dans le premier par la substitution

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) dp = \delta dp' - \beta dq', \quad (\alpha\delta - \beta\gamma) dq = -\gamma dp' + \alpha dq',$$

nous trouvons

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot E',$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot F',$$

$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot G'.$$

XXII.

Descendons de la recherche générale de l'article précédent à l'application très-large dans laquelle, en laissant encore à p et q leur signification la plus générale, nous adoptons pour p', q', les quantités désignées dans l'art. XV par r, φ (lettres dont nous nous servirons ici aussi), de sorte que, pour un point quelconque de la surface, r soit la plus courte distance à un point déterminé,

et φ l'angle en ce point entre le premier élément de r et une direction fixe. Nous avons ainsi $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega = 90$ degrés; nous poserons, de plus, $\sqrt{G'} = m$, de sorte que l'élément linéaire quelconque devienne $= \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$. Par suite, les quatre équations trouvées dans l'article précédent pour α, β, γ, δ, donnent :

$$(1) \qquad \sqrt{E} \,.\, \cos(\omega - \psi) = \frac{dr}{dp},$$

$$(2) \qquad \sqrt{G} \,.\, \cos \psi = \frac{dr}{dq},$$

$$(3) \qquad \sqrt{E} \,.\, \sin(\psi - \omega) = m \,.\, \frac{d\varphi}{dp},$$

$$(4) \qquad \sqrt{G} \,.\, \sin \psi = m \,.\, \frac{d\varphi}{dq}.$$

Mais la dernière et l'avant-dernière donnent

$$(5) \quad EG - F^2 = E\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 - 2F \,.\, \frac{dr}{dp} \,.\, \frac{dr}{dq} + G\left(\frac{dr}{dp}\right)^2,$$

$$(6) \quad \left(E \,.\, \frac{dr}{dq} - F\frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dq} = \left(F \,.\, \frac{dr}{dq} - G \,.\, \frac{dr}{dp}\right)\frac{d\varphi}{dp}.$$

C'est de ces équations qu'on doit tirer la détermination des quantités r, φ, ψ et (si besoin est) m, en p et q; savoir : l'intégration de l'équation (5) donnera r, et, ceci trouvé, l'intégration de l'équation (6) donnera φ, et l'une ou l'autre des équations (1), (2), ψ; enfin, on aura m par l'une ou l'autre des équations (3), (4).

L'intégration générale des équations (5), (6) doit nécessairement introduire deux fonctions arbitraires, et nous comprendrons facilement leur signification, si nous faisons attention que ces équations ne sont pas limitées au cas que nous considérons ici, mais qu'elles ont encore lieu, si l'on prend r et φ dans la signification générale de

l'art. XVI, de façon que r soit la longueur de la ligne la plus courte menée normalement à une ligne arbitraire déterminée, et φ une fonction arbitraire de la partie de la ligne qui est interceptée entre la ligne indéfinie de plus courte distance, et un point arbitraire déterminé. La solution générale doit ainsi embrasser tout cela d'une manière indéfinie, et les fonctions arbitraires deviendront définies, quand cette ligne arbitraire et la fonction des parties que φ doit donner sont assignées. Dans notre cas, on peut adopter un cercle infiniment petit, ayant son centre au point d'où l'on compte les distances r, et φ désignera les parties mêmes de ce cercle divisées par le rayon ; d'où l'on conclut facilement que les équations (5) et (6) suffisent complétement pour notre cas, pourvu que ce qu'elles laissent indéfini soit assujetti à cette condition, que r et φ conviennent pour ce point initial, et pour les points qui en sont infiniment peu distants.

D'ailleurs, pour ce qui regarde l'intégration même des équations (5), (6), on sait qu'elle peut se réduire à l'intégration d'équations aux différentielles partielles ordinaires, qui cependant sont la plupart des temps si compliquées, qu'il y a peu d'avantage à en tirer. Au contraire, le développement en séries qui suffisent abondamment aux besoins de la pratique, tant qu'il ne s'agit que de parties médiocres de la surface, n'est sujet à aucunes difficultés, et les formules rapportées ouvrent ainsi une source féconde pour la solution d'un grand nombre de problèmes très-importants. Mais, en cet endroit, nous ne développerons qu'un seul exemple pour montrer le caractère de la méthode.

XXIII.

Nous considérerons le cas où toutes les lignes pour lesquelles p est constant sont des lignes de plus courte dis-

tance, coupant orthogonalement la ligne pour laquelle $\varphi = 0$, et que nous pourrons regarder comme ligne des abscisses. Soient A le point pour lequel $r = 0$, D un point quelconque sur la ligne des abscisses, $AD = p$, B un point quelconque sur la ligne de plus courte distance normale à AD en D, et $BD = q$, de façon qu'on puisse considérer p comme l'abscisse, q comme l'ordonnée du point B; nous prenons les abscisses positives sur la branche de la ligne des abscisses à laquelle répond $\varphi = 0$, tandis que nous regardons r toujours comme une quantité positive; nous prenons les ordonnées positives dans la région où φ est compris entre 0 et 180 degrés.

Par le théorème de l'art. XVI, nous aurons $\omega = 90^\circ$, $F = 0$ et $G = 1$; nous poserons de plus $\sqrt{E} = n$. n sera ainsi fonction de p et q, et telle que pour $q = 0$ elle doit être égale à 1. L'application à notre cas de la formule rapportée dans l'art. XVIII montre que, dans une ligne *quelconque* de plus courte distance, on doit avoir $d\theta = \frac{dn}{dq} \cdot dp$, θ désignant l'angle compris entre l'élément de cette ligne et l'élément de la ligne pour laquelle q est constant. Comme déjà la ligne des abscisses est une ligne de plus courte distance, et que, pour elle, partout $\theta = 0$, on voit que, pour $q = 0$, on doit avoir partout $\frac{dn}{dq} = 0$. De là donc nous concluons que, si n est développée en série suivant les puissances croissantes de q, elle doit avoir la forme suivante :

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \text{etc.},$$

où f, g, h, etc., seront fonctions de p, et nous poserons

$$f = f^0 + f'p + f''p^2 + \text{etc.},$$
$$g = g^0 + g'p + g''p^2 + \text{etc.},$$
$$h = h^0 + h'p + h''p^2 + \text{etc.},$$

où

$$n = 1 + f^{\circ} q^2 + f' p q^2 + f'' p^2 q^2 + \text{etc.},$$
$$+ g^{\circ} q^3 + g' p q^3 + \text{etc.},$$
$$+ h^{\circ} q^4 + \text{etc}.$$

XXIV.

Les équations de l'art. XXII donnent, dans le cas dont nous nous occupons,

$$n \sin\psi = \frac{dr}{dp}, \quad \cos\psi = \frac{dr}{dq}, \quad -n\cos\psi = m.\frac{d\varphi}{dp}, \quad \sin\psi = m.\frac{d\varphi}{dq}.$$

$$n^2 = n^2\left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dp}\right)^2, \quad n^2.\frac{dr}{dq}\cdot\frac{d\varphi}{dq} + \frac{dr}{dp}\cdot\frac{d\varphi}{dp} = 0.$$

A l'aide de ces équations, dont la cinquième et la sixième sont déjà comprises dans les autres, on pourra développer les séries pour r, φ, ψ, m, ou pour des fonctions quelconques de ces quantités; nous allons traiter ici celles qui sont les plus dignes d'attention.

Comme, pour des valeurs infiniment petites de p, q, on doit avoir $r^2 = p^2 + q^2$, la série pour r^2 commencera par les termes $p^2 + q^2$; nous obtiendrons les termes d'un ordre plus élevé par la méthode des coefficients indéterminés (*), à l'aide de l'équation

$$\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{d.r^2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d.r^2}{dq}\right)^2 = 4r^2,$$

savoir :

$$[1] \quad r^2 = p^2 + \frac{3}{2}f^{\circ} p^2 q^2 + \frac{1}{2} f' p^3 q^2 + \left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^{\circ 2}\right) p^4 q^2 + \text{etc.}$$
$$+ q^2 + \frac{1}{2} g^{\circ} p^2 q^3 + \frac{2}{5} g' p^3 q^3$$
$$+ \left(\frac{2}{5} h^{\circ} - \frac{7}{45} f^{\circ} f^{\circ}\right) p^2 q^4.$$

(*) Nous avons jugé superflu d'écrire ici le calcul, qui peut être un peu abrégé par quelques artifices.

Nous avons ensuite, au moyen de la formule $r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{d.r^2}{dp}$,

$$[2]\quad \left\{\begin{aligned} r\sin\psi = p &- \tfrac{1}{3}f^{0}pq^{2} - \tfrac{1}{4}f'p^{2}q^{2} - \left(\tfrac{1}{5}f'' + \tfrac{8}{45}f^{0}f^{0}\right)p^{3}q^{2} + \ldots \\ &- \tfrac{1}{2}g^{0}pq^{3} - \tfrac{2}{5}g'p^{2}q^{3} \\ &- \left(\tfrac{3}{5}h^{0} - \tfrac{8}{45}f^{0}f^{0}\right)pq^{4}, \end{aligned}\right.$$

et, par la formule $r\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{d.r^2}{dq}$,

$$[3]\quad \left\{\begin{aligned} r\cos\psi = q &+ \tfrac{2}{3}f^{0}p^{2}q + \tfrac{1}{2}f'p^{3}q + \left(\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^{0}f^{0}\right)p^{4}q + \ldots \\ &+ \tfrac{3}{4}g^{0}p^{2}q^{2} + \tfrac{3}{5}g'p^{3}q^{2} \\ &+ \left(\tfrac{4}{5}h^{0} - \tfrac{14}{45}f^{0}f^{0}\right)p^{2}q^{3}. \end{aligned}\right.$$

L'une et l'autre formule font connaître l'angle ψ. Ensuite, quant au calcul de l'angle φ, les séries pour $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ se développent très-élégamment au moyen des équations aux différentielles partielles,

$$\frac{d.r\cos\varphi}{dp} = n\cos\varphi.\sin\psi - r\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dp},$$

$$\frac{d.r\cos\varphi}{dq} = \cos\varphi.\cos\psi - r\sin\varphi.\frac{d\varphi}{dq},$$

$$\frac{d.r\sin\varphi}{dp} = n\sin\varphi.\sin\psi + r\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dp},$$

$$\frac{d.r\sin\varphi}{dq} = \sin\varphi.\cos\psi + r\cos\varphi.\frac{d\varphi}{dq},$$

$$n\cos\psi.\frac{d\varphi}{dq} + \sin\psi.\frac{d\varphi}{dp} = 0,$$

dont la combinaison donne

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{d\,.\,r\cos\varphi}{dp}+r\cos\psi\,.\,\frac{d\,.\,r\cos\varphi}{dq}=r\cos\varphi,$$

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{d\,.\,r\sin\varphi}{dp}+r\cos\psi\,.\,\frac{d\,.\,r\sin\varphi}{dq}=r\sin\varphi.$$

On tire de là facilement, pour calculer $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, des séries dont les premiers termes doivent être évidemment p et q, savoir :

$$[4]\left\{\begin{aligned} r\cos\varphi = p &+ \tfrac{2}{3}f^{\circ}pq^2 + \tfrac{5}{12}f'p^2q^2 + \left(\tfrac{3}{10}f'' - \tfrac{8}{45}f^{\circ}f^{\circ}\right)p^3q^2 + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{2}g^{\circ}pq^3 + \tfrac{7}{20}g'p^2q^3 \\ &+ \left(\tfrac{2}{5}h^{\circ} - \tfrac{7}{45}f^{\circ}f^{\circ}\right)pq^4, \end{aligned}\right.$$

$$[5]\left\{\begin{aligned} r\sin\varphi = q &- \tfrac{1}{3}f^{\circ}p^2q - \tfrac{1}{6}f'p^3q - \left(\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{7}{90}f^{\circ}f^{\circ}\right)p^4q - \ldots \\ &- \tfrac{1}{4}g^{\circ}p^2q^2 - \tfrac{2}{20}g'p^3q^2 \\ &- \left(\tfrac{1}{5}h^{\circ} + \tfrac{14}{90}f^{\circ}f^{\circ}\right)p^2q^3. \end{aligned}\right.$$

En combinant les équations [2], [3], [4], [5], on peut obtenir une série pour calculer $r^2\cos(\psi+\varphi)$; divisant cette série par la série [1] qui donne r^2, on aura $\cos(\psi+\varphi)$, et, par conséquent, aussi $\psi+\varphi$ développé en série. On peut cependant obtenir cette même série plus élégamment de la manière suivante. En différentiant la première et la seconde des équations qui sont rapportées au commencement de cet article, nous obtenons

$$\sin\psi\,.\,\frac{dn}{dq}+n\cos\psi\,.\,\frac{d\psi}{dq}+\sin\psi\,.\,\frac{d\psi}{dp}=0\,;$$

combinant cette équation avec celle-ci,

$$n\cos\psi\,.\,\frac{d\varphi}{dq}+\sin\psi\,.\,\frac{d\varphi}{dp}=0\,,$$

il vient

$$\frac{r \sin \psi}{n} \cdot \frac{dn}{dq} + \frac{r \sin \psi}{n} \cdot \frac{d(\psi + \varphi)}{dp} + r \cos \psi \cdot \frac{d(\psi + \varphi)}{dq} = 0.$$

De cette équation, à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, nous tirerons facilement la série suivante pour $\psi + \varphi$, si nous faisons attention que son premier terme doit être $\frac{1}{2}\pi$, le rayon étant pris pour unité, et 2π désignant la circonférence du cercle,

$$[6] \quad \left\{ \begin{aligned} \psi + \varphi = \frac{1}{2}\pi - f^0 pq - \frac{2}{3} f' p^2 q - \left(\frac{1}{2} f'' - \frac{1}{6} f^0 f^0\right) p^3 q - \ldots \\ - g^0 pq^2 - \frac{3}{4} g' p^2 q^2 \\ - \left(h^0 - \frac{1}{3} f^0 f^0\right) pq^3. \end{aligned} \right.$$

Il nous paraît utile de développer aussi en série l'aire du triangle ABD. Nous nous servirons, pour ce développement, de l'équation de condition suivante, qui dérive facilement de considérations géométriques assez naturelles, et dans laquelle S désigne l'aire cherchée,

$$\frac{r \sin \psi}{n} \cdot \frac{dS}{dp} + r \cos \psi \cdot \frac{dS}{dq} = \frac{r \sin \psi}{n} \int n \, dq,$$

l'intégration commençant à $q = 0$. De là, en effet, nous obtenons, par la méthode des coefficients indéterminés,

$$[7] \quad \left\{ \begin{aligned} S = \frac{1}{2} pq - \frac{1}{12} f^0 p^3 q - \frac{1}{20} f' p^4 q - \left(\frac{1}{30} f'' - \frac{1}{60} f^0 f^0\right) p^5 q - \ldots \\ - \frac{1}{12} f^0 pq^3 - \frac{3}{40} g^0 p^3 q^2 - \frac{1}{20} g' p^4 q^2 \\ - \frac{7}{120} f' p^2 q^3 - \left(\frac{1}{15} h^0 + \frac{2}{45} f'' + \frac{1}{60} f^0 f^0\right) p^3 q^3 \\ - \frac{1}{10} g^0 pq^4 - \frac{3}{40} g' p^2 q^4 \\ - \left(\frac{1}{10} h^0 - \frac{1}{30} f^0 f^0\right) pq^5. \end{aligned} \right.$$

XXV.

Des formules de l'article précédent, qui se rapportent au triangle rectangle formé par des lignes de plus courte distance, passons à quelque chose de plus général. Soit sur la même ligne de plus courte distance BD, un autre point C pour lequel p ne change pas, et les lettres q', r', φ', ψ', S′ désignent pour le point C les mêmes choses que q, r, φ, ψ, S pour le point B. On forme ainsi, entre les points A, B, C, un triangle dont nous désignons les angles par A, B, C, les côtés opposés par a, b, c, l'aire par σ; nous exprimerons la mesure de la courbure aux points A, B, C respectivement par α, β, γ. Supposant donc (ce qui est permis) que les quantités p, q, $q-q'$ sont positives, nous avons

$$A=\varphi-\varphi',\quad B=\psi,\quad C=\pi-\psi',$$
$$a=q-q',\quad b=r',\quad c=r,\quad \sigma=S-S'.$$

Avant tout, exprimons l'aire σ en série. En changeant dans la série [7] chacune des quantités relatives à B dans celles qui se rapportent à C, il vient cette série pour S′, développée jusqu'aux quantités du sixième ordre,

$$\sigma=\frac{1}{2}p(q-q')\left\{\begin{array}{l}1-\frac{1}{6}f^0(p^2+q^2+qq'+q'^2)\\ -\frac{1}{60}f'p(6p^2+7q^2+7qq'+7q'q')\\ -\frac{1}{20}g^0(q+q')(3p^2+4q^2+4qq'+4q'^2)\end{array}\right\}.$$

Cette formule, à l'aide de la série [2], savoir,

$$c\sin B=p\left(1-\frac{1}{3}f^0q^2-\frac{1}{4}f'pq^2-\frac{1}{2}g^0q^3-\ldots\right),$$

se change dans la suivante :

$$\sigma = \frac{1}{2} ac \sin B \left\{ \begin{aligned} & 1 - \frac{1}{6} f^{\circ} (p^2 - q^2 + qq' + q'^2) \\ & - \frac{1}{60} f' p (6p^2 - 8q^2 + 7qq' + 7q'^2) \\ & - \frac{1}{20} g^{\circ} (3p^2 q + 3p^2 q' - 6q^3 + 4q^2 q' + 4qq'^2 + 4q'^3) \end{aligned} \right\}.$$

La mesure de la courbure pour un point quelconque de la surface devient, par l'art. XIX (où m, p, q étaient ce que sont ici n, q, p),

$$-\frac{1}{n} \cdot \frac{d^2 n}{dq^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hq^2 + \ldots}{1 + fq^2 + \ldots}$$
$$= -2f - 6gq - (12h - 2f^2) q^2 \ldots$$

De là, quand p, q se rapportent au point B,

$$\beta = -2f^{\circ} - 2f'p - 6g^{\circ} q - 2f'' p^2 - 6g' pq$$
$$- (12h^{\circ} - 2f^{\circ} f^{\circ}) q^2 - \ldots,$$

et aussi

$$\gamma = -2f^{\circ} - 2f'p - 6g^{\circ} q' - 2f'' p^2 - 6g' pq'$$
$$- (12h^{\circ} - 2f^{\circ} f^{\circ}) q'^2 - \ldots,$$
$$\alpha = -2f^{\circ}.$$

En introduisant ces mesures de courbure dans la série pour σ, nous obtenons l'expression suivante, exacte jusqu'aux quantités du sixième ordre (exclusivement),

$$\sigma = \frac{1}{5} ac \sin B \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{120} \alpha (4p^2 - 2q^2 + 3qq' + 3q'^2) \\ & + \frac{1}{120} \beta (3p^2 - 6q^2 + 6qq' + 6q'^2) \\ & + \frac{1}{120} \gamma (3p^2 - 2q^2 + qq' + 4q'^2) \end{aligned} \right\}.$$

La précision restera la même, si pour p, q, q' nous substituons $c \sin B$, $c \cos B$, $c \cos B - a$; cela fait, il

vient

$$[8]\quad \sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{120}\alpha(3a^2+4c^2-\ \ 9ac\cos B)\\ +\frac{1}{120}\beta(3a^2+3c^2-12ac\cos B)\\ +\frac{1}{120}\gamma(4a^2+3c^2-\ \ 9ac\cos B)\end{array}\right\}.$$

Comme tout ce qui se rapporte à la ligne AD menée normalement à BC a disparu de cette équation, on pourra permuter aussi entre eux les points A, B, C avec leurs corrélatifs; c'est pourquoi on aura, avec la même précision,

$$[9]\quad \sigma = \frac{1}{2}bc\sin A\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{120}\alpha(3b^2+3c^2-12bc\cos A)\\ +\frac{1}{120}\beta(3b^2+4c^2-\ \ 9bc\cos A)\\ +\frac{1}{120}\gamma(4b^2+3c^2-\ \ 9bc\cos A)\end{array}\right\},$$

$$[10]\quad \sigma = \frac{1}{2}ab\sin C\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{120}\alpha(3a^2+4b^2-\ \ 9ac\cos C)\\ +\frac{1}{120}\beta(4a^2+3b^2-\ \ 9ab\cos C)\\ +\frac{1}{120}\gamma(3a^2+3b^2-12ab\cos C)\end{array}\right\}.$$

XXVI.

La considération du triangle plan rectiligne, dont les côtés sont égaux à a, b, c, est d'une grande utilité; les angles de ce triangle, que nous désignerons par A^*, B^*, C^*, diffèrent des angles du triangle sur la surface courbe, savoir, de A, B, C de quantités du second ordre, et il sera essentiel de développer avec soin ces différences. Mais il suffira d'avoir posé les premières bases de ces calculs plus prolixes que difficiles.

En changeant dans les formules [1], [4], [5] les quantités qui se rapportent à B en celles qui se rapportent à C, nous trouverons des formules pour r'^2, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Alors le développement de l'expression

$$r^2 + r'^2 - (q-q')^2 - 2r\cos\varphi . r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi . r'\sin\varphi',$$

qui devient

$$= b^2 + c^2 - a^2 - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^* - \cos A),$$

combinée avec le développement de l'expression

$$r\sin\varphi\ r'\cos\varphi' - r\cos\varphi . r'\sin\varphi',$$

qui devient $= bc\sin A$, donne la formule suivante :

$$\begin{array}{l}\cos A^* - \cos A \\ = -(q-q')p\sin A\end{array}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{3}f^0 + \frac{1}{6}f'\right)p + \frac{1}{4}g^0(q+q') \\ + \left(\frac{1}{10}f'' - \frac{1}{45}f^0f^0\right)p^2 + \frac{1}{30}g'p(q+q') \\ + \left(\frac{1}{5}h^0 - \frac{1}{90}f^0f^0\right)(q^2+qq'+q'^2) + \ldots\end{array}\right\}.$$

De là vient aussi, jusqu'aux quantités du cinquième ordre,

$$A^* - A = -(q-q')p\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}f^0 + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^0(q+q') + \frac{1}{10}f''p^2 \\ + \frac{3}{20}g'p(q+q') + \frac{1}{5}h^0(q^2+qq'+q'^2) \\ - \frac{1}{90}f^0f^0(7p^2+7q^2+12qq'+7q'^2)\end{array}\right\}.$$

En combinant cette formule avec celle-ci,

$$2\sigma = ap\left[1 - \frac{1}{6}f^0(p^2+q^2+qq'+q'^2 - \ldots)\right],$$

et avec les valeurs des quantités α, β, γ rapportées dans l'article précédent, nous obtenons jusqu'aux quantités

du cinquième ordre,

$$[11]\ A^* = A - \sigma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{2}{15}f''p^2 + \frac{1}{5}g'p(q+q') \\ \quad + \frac{1}{5}h^0(3q^2 - 2qq' + 3q'^2) \\ \quad + \frac{1}{90}f^0f^0(4p^2 - 11q^2 + 14qq' - 11q'^2) \end{array} \right\}.$$

Par des opérations tout à fait semblables, nous trouvons

$$[12]\ B^* = B - \sigma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{12}\gamma + \frac{1}{10}f''p^2 + \frac{1}{10}g'p(2q+q') \\ \quad + \frac{1}{5}h^0(4q^2 - 4qq' + 3q'^2) \\ \quad - \frac{1}{90}f^0f^0(2p^2 + 8q^2 - 8qq' + 11q'^2) \end{array} \right\},$$

$$[13]\ C^* = C - \sigma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6}\gamma + \frac{1}{10}f''p^2 + \frac{1}{10}g'p(q+2q') \\ \quad + \frac{1}{5}h^0(3q^2 - 4qq' + 4q'^2) \\ \quad - \frac{1}{90}f^0f^0(2p^2 + 11q^2 - 8qq' + 8q'^2) \end{array} \right\}.$$

De là nous déduisons en même temps, puisque la somme $A^* + B^* + C^*$ est égale à deux droits, l'excès de la somme $A + B + C$ sur deux angles droits, savoir :

$$[14]\ A+B+C = \pi + \sigma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{3}f''p^2 + \frac{1}{2}g'p(q+q') \\ \quad + \left(2h^0 - \frac{1}{3}f^0f^0\right)(q^2 - qq' + q'^2) \end{array} \right\}.$$

Cette dernière formule pourrait aussi se déduire de la formule [6].

XXVII.

Si la surface courbe est une sphère dont le rayon égale 1, on aura

$$\alpha=\beta=\gamma=-2f^{\circ}=\frac{1}{R^2},\quad f''=0,\quad g'=0,\quad 6h^{\circ}-f^{\circ}f^{\circ}=0,$$

ou

$$h^{\circ}=\frac{1}{24\,R^4}.$$

Par là, la formule [14] devient

$$A+B+C=\pi+\frac{\sigma}{R^2},$$

et jouit d'une précision absolue; mais les formules [11], [12], [13] donnent

$$A^{*}=A-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180\,R^4}(2p^2-q^2+4qq'-q'^2),$$

$$B^{*}=B-\frac{\sigma}{3R^2}+\frac{\sigma}{180\,R^4}(p^2-2q^2+2qq'+q'^2),$$

$$C^{*}=C-\frac{\sigma}{3R^2}+\frac{\sigma}{180\,R^4}(p^2+q^2+2qq'-2q'^2),$$

ou, avec la même exactitude,

$$A^{*}=A-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180\,R^4}(b^2+c^2-2a^2),$$

$$B^{*}=B-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180\,R^4}(a^2+c^2-2b^2),$$

$$C^{*}=C-\frac{\sigma}{3R^2}-\frac{\sigma}{180\,R^4}(a^2+b^2-2c^2).$$

En négligeant les quantités du quatrième ordre, on tire de là le théorème connu proposé, pour la première fois, par l'illustre Legendre.

XXVIII.

Nos formules générales, en rejetant les termes du

quatrième ordre, deviennent très-simples, savoir :

$$A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma),$$

$$B^* = B - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma),$$

$$C^* = C - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Ainsi, il faut appliquer à A, B, C des réductions inégales, quand ils ne sont pas sur une surface sphérique, pour que les sinus des angles dans lesquels ils ont été changés soient proportionnels aux côtés opposés. L'inégalité, généralement parlant, sera du troisième ordre : mais, si la surface diffère peu de la sphère, cette inégalité se rapportera à un ordre supérieur. Dans les triangles même les plus grands sur la surface de la terre, dont on peut mesurer les angles, la différence peut toujours être regardée comme insensible. Ainsi, par exemple, dans le triangle le plus grand parmi ceux que nous avons mesurés l'année précédente, savoir, entre les points Hohehagen, Brocken, Inselsberg, où l'excès de la somme des angles fut égale à 14″,85348, le calcul donna les réductions suivantes à appliquer aux angles :

Hohehagen..........	4″,95113,
Brocken	4″,95104,
Inselsberg...........	4″,95131.

XXIX.

Pour finir, nous ajouterons encore la comparaison de l'aire du triangle sur la surface courbe avec l'aire du triangle rectiligne, dont les côtés sont *a*, *b*, *c*. Nous désignerons par σ^* cette dernière aire, qui est égale à

$$\frac{1}{2} bc \sin A^* = \frac{1}{2} ac \sin B^* = \frac{1}{2} ab \sin C^*$$

Nous avons, jusqu'aux quantités du quatrième ordre,

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12}\sigma \cos A . (2\alpha + \beta + \gamma),$$

ou, avec la même exactitude,

$$\sin A = \sin A^* \left[1 + \frac{1}{24} bc \cos A . (2\alpha + \beta + \gamma)\right].$$

Substituant cette valeur dans la formule [9], on aura jusqu'aux quantités du sixième ordre,

$$\sigma = \frac{1}{2} bc \sin A^* \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{120}\alpha(3b^2 + 3c^2 - 2bc\cos A) \\ + \frac{1}{120}\beta(3b^2 + 4c^2 - 4bc\cos A) \\ + \frac{1}{120}\gamma(4b^2 + 3c^2 - 4bc\cos A) \end{array} \right\},$$

ou, avec la même exactitude,

$$\sigma = \sigma^* \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{120}\alpha(a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \frac{1}{120}\beta(2a^2 + b^2 + 2c^2) \\ + \frac{1}{120}\gamma(2a^2 + 2b^2 + c^2) \end{array} \right\}.$$

Pour la surface sphérique, cette formule prend la forme suivante :

$$\sigma = \sigma^* \left[1 + \frac{1}{24}\alpha(a^2 + b^2 + c^2)\right],$$

à la place de laquelle on peut prendre aussi la suivante, en conservant la même précision, comme il est facile de vérifier,

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A . \sin B . \sin C}{\sin A^* . \sin B^* . \sin C^*}}.$$

Si l'on applique la même formule aux triangles sur une surface courbe non sphérique, l'erreur sera, généralement parlant, du cinquième ordre, mais insensible dans

tous les triangles qu'on peut mesurer sur la surface de la terre.

Note. Des fautes typographiques et quelques erreurs de calcul se sont glissées dans le Mémoire original. Nous les avons corrigées et nous nous sommes servi des corrections que M. Bos, élève de l'École Normale, aujourd'hui professeur au lycée de Strasbourg, a eu la bonté de nous communiquer. Le Mémoire fait partie du tome VI des *Nouveaux Mémoires de la Société royale des Sciences de Göttingue;* on le trouve à la page 99 de ce tome qui a paru en 1828. Il est réimprimé dans l'*Application de l'Analyse* de Monge, édition de 1850. On a traduit sur cette réimpression.

DU TRACÉ GÉOGRAPHIQUE

Des surfaces courbes les unes sur les autres, et application de ce tracé à la construction des cartes géographiques;

PAR M. LE Dr J. DIENGER,

Professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe.

C'est M. Gauss qui, le premier, a résolu le problème important de faire correspondre les points d'une surface courbe à ceux d'une autre surface courbe, de telle sorte que les éléments de ces surfaces passant par des points correspondants soient semblables. M. Liouville a ajouté des éclaircissements aux développements de M. Gauss (*), et je crois rendre quelque service aux lecteurs de ces *Annales*, en exposant les principes sur lesquels repose la solution de ce problème, en suivant la route que ces grands maîtres ont tracée. J'ajouterai quelques indications rapides de l'application de ces principes au tracé des cartes géographiques.

I.

Supposons qu'on ait deux surfaces S et Σ, et qu'on veuille faire correspondre les points de la surface S aux points de la surface Σ, de telle sorte qu'en connaissant

(*) *Application de l'Analyse, etc.*, page 601.

les coordonnées d'un point $\mathfrak{M}$ de la surface S, on puisse déterminer les coordonnées du point M de la surface Σ, qui correspond au point $\mathfrak{M}$. Nous supposerons, en outre, que la loi de cette correspondance soit telle, qu'à des points différents de la surface S correspondent des points différents de la surface Σ, et qu'à deux points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ infiniment voisins de S, correspondent deux points aussi infiniment voisins M et M' de Σ. Il est aisé de voir que ces conditions seront remplies aussitôt que la loi qui régit cette correspondance est exprimée par une fonction continue.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de déterminer cette loi de correspondance, sous la condition que les éléments infiniment petits des deux surfaces S et Σ passant par les points correspondants $\mathfrak{M}$ et M soient semblables, c'est-à-dire qu'en se figurant ces éléments de forme triangulaire, que ces triangles soient semblables. On pourra donc exprimer ce problème aussi de cette manière : Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ trois points infiniment voisins de la surface S (non situés en ligne droite), et M, M', M'' les points correspondants de l'autre surface, les triangles $\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{M}''$, M M' M'' doivent être semblables.

Pour résoudre ce problème dans toute sa généralité, nous ferons d'abord les observations suivantes : Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point $\mathfrak{M}$ par rapport à un système d'axes rectangulaires quelconques, et soit $\mathfrak{N}$ un point infiniment voisin sur la même surface; l'élément linéaire ds sera exprimé par $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ étant les coordonnées du point $\mathfrak{N}$, et $dz=\frac{dz}{dx}\,dx+\frac{dz}{dy}\,dy$, et l'on tirera les valeurs des quantités $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ de l'équation donnée de la surface. Les coordonnées x, y sont deux variables indépendantes.

Imaginons maintenant qu'au lieu de ces deux variables indépendantes x, y, on en introduise deux autres p, q, liées par des équations connues aux quantités x, y, de telle sorte qu'on pourra exprimer x, y par p, q; on aura évidemment

$$dx = \frac{dx}{dp}dp + \frac{dx}{dq}dq, \quad dy = \frac{dy}{dp}dp + \frac{dy}{dq}dq.$$

Mais comme z est une fonction de x et y, z sera aussi une fonction de p et q, et l'on aura donc aussi

$$dz = \frac{dz}{dp}dp + \frac{dz}{dq}dq.$$

Soient donc p, q les valeurs de ces nouvelles variables indépendantes qui fixent la position du point $\mathfrak{M}$, $p+dp$, $q+dq$ leurs valeurs pour le point $\mathfrak{N}$; l'élément linéaire $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ sera exprimé par

$$(1)\left\{\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}dp+\frac{dx}{dq}dq\right)^2+\left(\frac{dy}{dp}dp+\frac{dy}{dq}dq\right)^2+\left(\frac{dz}{dp}dp+\frac{dz}{dq}dq\right)^2} \\ &= \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dpdq + G\,dq^2}, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger :

$$(2)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = E, \\ &\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = F, \\ &\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 = G. \end{aligned}\right.$$

L'expression (1) sera donc l'expression générale d'un élément linéaire sur une surface courbe. Les quantités dp, dq étant absolument indépendantes l'une de l'autre, cette expression pourra désigner un élément linéaire quelconque passant sur la surface courbe par le point $\mathfrak{M}$; mais aussitôt qu'on suppose une relation entre

ces quantités, cet élément appartiendra à une ligne courbe déterminée sur la surface.

II.

Soient, comme au § I, $\mathfrak{M}$ un point de la surface S, M le point correspondant de la surface Σ; x, y, z les coordonnées du point $\mathfrak{M}$; x', y', z' celles du point M rapportées aux mêmes axes ou à d'autres axes rectangulaires. Par suite de la loi qui régit la correspondance de ces deux points, les quantités x', y', z' seront fonctions des quantités x, y, z, c'est-à-dire fonctions des variables indépendantes x, y. Ayant introduit les variables indépendantes p, q (qui pourraient très-bien être les quantités x, y elles-mêmes), on verra facilement que x', y', z' seront fonctions de p, q aussi bien que x, y, z. Les valeurs p, q de ces variables indépendantes fixeront donc sur les deux surfaces les points correspondants $\mathfrak{M}$, M, et en passant de ces valeurs aux valeurs $p+dp$, $q+dq$, on passera de ces points à deux points infiniment voisins $\mathfrak{N}$ et N. Les éléments linéaires $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ et MN seront dits *éléments correspondants*, en désignant par là deux éléments passant par des points correspondants. Les quantités infiniment petites dp, dq restant absolument indépendantes l'une de l'autre, les points $\mathfrak{N}$ et N peuvent être des points quelconques infiniment voisins de $\mathfrak{M}$ et M.

Soient maintenant ds l'élément $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, dS l'élément MN, et soit

$$\frac{dS}{ds} = m, \tag{3}$$

et supposons que cette équation ait lieu sans aucune relation entre dp et dq; elle exprimera donc que deux éléments linéaires correspondants passant par les points correspondants $\mathfrak{M}$; M ont toujours le même rapport entre eux, quelle que soit leur direction. Or, en désignant

par E', F', G' des quantités absolument semblables aux quantités E, F, G, et qu'on obtient par les équations (2), en substituant à x, y, z les quantités x', y', z'; on aura

$$dS = \sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2},$$

et l'équation (3) donnera

$$E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2 = m^2[E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2].$$

Pour que cette équation puisse subsister indépendamment d'aucune relation entre dp et dq, il faut qu'on ait

$$(4) \qquad E' = m^2E, \quad F' = m^2F, \quad G' = m^2G.$$

Les équations (4) expriment donc la relation qui doit exister entre les quantités E, F, G, E', F', G', c'est-à-dire entre x, y, z, x', y', z', pour que deux éléments correspondants quelconques passant par deux points correspondants aient entre eux le même rapport, quelle que soit leur direction.

Or je dis que ces mêmes équations (4) expriment aussi les conditions pour que deux couples d'éléments linéaires correspondants, $\mathcal{M}\mathcal{N}$, $\mathcal{M}\mathcal{N}'$ et MN, MN', passant par les points correspondants $\mathcal{M}$ et M, fassent entre eux le même angle.

Car, soient p, q les valeurs des variables indépendantes qui fixent la position des points $\mathcal{M}$ et M; $p + dp$, $q + dq$ ces valeurs pour les points $\mathcal{N}$ et N; $p + dp'$, $q + dq'$ pour $\mathcal{N}'$ et N'; on aura

$$\mathcal{M}\mathcal{N} = \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2},$$
$$\mathcal{M}\mathcal{N}' = \sqrt{E\,dp'^2 + 2F\,dp'dq' + G\,dq'^2};$$
$$MN = \sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G\,dq^2},$$
$$MN' = \sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2}.$$

Soient α l'angle des deux éléments $\mathcal{M}\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}\mathcal{N}'$, α' celui des éléments MN et MN'; on a, en désignant les coor-

données rectangulaires de N par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et celles de N′ par $x+dx'$, $y+dy'$, $z+dz'$,

$$\cos\alpha = \frac{dx.dx'+dy.dy'+dz.dz'}{\mathfrak{MN}.\mathfrak{MN}'}$$

$$= \frac{\left(\frac{dx}{dp}dp+\frac{dx}{dq}dq\right)\left(\frac{dx}{dp}dp'+\frac{dx}{dq}dq'\right)+\left(\frac{dy}{dp}dp+\frac{dy}{dq}dq\right)\left(\frac{dy}{dp}dp'+\frac{dy}{dq}dq'\right)+\left(\frac{dz}{dp}dp+\frac{dz}{dq}dq\right)\left(\frac{dz}{dp}dp'+\frac{dz}{dq}dq'\right)}{\mathfrak{MN}.\mathfrak{MN}'}$$

$$= \frac{E\,dp\,dp'+F(dp\,dq'+dp'dq)+G\,dq\,dq'}{\sqrt{E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2}.\sqrt{E\,dp'^2+2F\,dp'dq'+G\,dq'^2}}.$$

De même, on aura

$$\cos\alpha' = \frac{E'dp\,dp'+F'(dp\,dq'+dp'dq)+G'dq\,dq'}{\sqrt{E'dp^2+2F'dp\,dq+G'dq^2}.\sqrt{E'dp'^2+2F\,dp'dq'+G'dq'^2}}.$$

Or, par suite des équations (4), ces quantités sont identiques; donc on aura

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \alpha = \alpha',$$

vu qu'on pourra toujours supposer les angles α, α' comptés, de sorte qu'on aura $\alpha = \alpha'$, et non $\alpha' = 360 - \alpha$.

Il suit de ces développements que, quelles que soient les coordonnées indépendantes p, q, les équations (4), qui résultent de la supposition que les éléments linéaires correspondants, groupés autour des points correspondants, ont tous le même rapport entre eux, expriment en même temps les conditions pour que ces éléments correspondants fassent entre eux les mêmes angles.

Enfin, nous tirons de là cette conséquence, que les éléments triangulaires $\mathfrak{N}\mathfrak{M}\mathfrak{N}'$, NMN′ sont semblables, parce qu'on a

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N} : \mathfrak{M}\mathfrak{N}' = \mathrm{MN} : \mathrm{MN}',$$
$$\alpha = \alpha',$$

c'est-à-dire que les éléments des deux surfaces passant par trois points infiniment voisins et ayant une forme triangulaire, sont semblables, ce que que nous avons supposé devoir être au § I.

En susbtituant à p, q d'autres variables indépendantes, la même conclusion aura toujours lieu, pourvu qu'on ait $\frac{dS}{ds} = m$, indépendamment d'aucune relation entre ces variables indépendantes.

III.

Je dis maintenant qu'on pourra toujours trouver des variables indépendantes φ et ψ, de telle sorte que $ds = \sqrt{h(d\varphi^2 + d\psi^2)}$. Si l'on avait $F = 0$, $E = G$, les coordonnées p, q rempliraient déjà cette condition, et elles seraient alors les coordonnées cherchées φ, ψ. Mais, en général, ce cas n'aura pas lieu, et l'on trouvera les quantités φ, ψ de la manière suivante. Nous avons vu, § II, qu'on a $ds^2 = E dp^2 + 2F dp\,dq + G dq^2$; or il est facile de voir qu'on a, en désignant par i la quantité $\sqrt{-1}$,

$$E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$$
$$= \frac{1}{E}\left(E dp + F dq + i dq\sqrt{EG - F^2}\right)\left(E dp + F dq - i\sqrt{EG - F^2}\right).$$

La quantité $EG - F^2$ est toujours positive, car on trouve

$$EG - F^2 = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq}\right)^2,$$

quantité évidemment positive. Supposons maintenant qu'on ait l'équation différentielle

$$(5)\qquad E\,dp + F\,dq + i\,dq\sqrt{EG - F^2} = 0\,;$$

il y aura toujours un facteur ν, de telle sorte qu'en multipliant le premier membre de cette équation par ce facteur, ce membre soit une différentielle exacte (Moigno, *Leçons sur le Calcul intégral*, leçon XXIII); donc on aura

$$\nu\left(E\,dp + F\,dq + i\,dq\sqrt{EG - F^2}\right) = d\varphi + i\,d\psi,$$

φ et ψ étant des quantités dépendant de p et q, qu'on saura toujours déterminer au moyen de l'équation (5). Donc on a

$$E\,dp + F\,dq + i\,dq\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{\nu}(d\varphi + i\,d\psi),$$

et, de même,

$$E\,dp + F\,dq - i\,dq\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{\nu'}(d\varphi + i\,d\psi),$$

où ν' sera égale à ν, si cette dernière quantité ne contient point de i. Donc on a

$$(6)\qquad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{1}{E}\cdot\dfrac{1}{\nu}(d\varphi + i\,d\psi)\cdot\dfrac{1}{\nu'}(d\varphi - i\,d\psi) \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{E\,\nu\nu'}(d\varphi^2 + d\psi^2) = h(d\varphi^2 + d\psi^2), \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{E\,\nu\nu'},$$

ce qui démontre qu'on peut donner à ds la forme désignée ci-dessus. On pourra, de même, supposer

$$dS^2 = H(d\Phi^2 + d\Psi^2),$$

Φ et Ψ étant des quantités trouvées par l'intégration de l'équation

$$E'dp + F'dq + i\,dq\sqrt{E'G' - F'^2} = 0,$$

ou d'une autre manière quelconque. Prenons maintenant les variables φ, ψ pour variables indépendantes ; les variables Φ, Ψ devront en dépendre en tant que les points des deux surfaces correspondent les uns aux autres, et en supposant que la relation $dS^2 = m^2 ds^2$ ait lieu indépendamment d'aucune relation entre $d\varphi$ et $d\psi$, les théorèmes du § II auront toujours lieu. Or cette relation nous donnera l'expression de Φ et Ψ en φ et ψ, de cette manière.

L'équation $dS^2 = m^2 ds^2$ est

$$\mathrm{H}[(d\Phi)^2 + (d\Psi)^2] = m^2 h[(d\varphi)^2 + (d\psi)^2];$$

c'est-à-dire, en posant

$$\frac{m^2 h}{\mathrm{H}} = k, \quad d\Phi = \frac{d\Phi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Phi}{d\psi} d\psi, \quad d\Psi = \frac{d\Psi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Psi}{d\psi} d\psi,$$

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Phi}{d\psi} d\psi\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Psi}{d\psi} d\psi\right)^2 = k(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

d'où il résulte

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2 = k, \\ &\frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{d\Phi}{d\psi} + \frac{d\Psi}{d\varphi}\frac{d\Psi}{d\psi} = 0. \end{aligned} \right.$$

La dernière de ces équations donne

$$\frac{\dfrac{d\Phi}{d\varphi}}{\dfrac{d\Psi}{d\varphi}} = -\frac{\dfrac{d\Psi}{d\psi}}{\dfrac{d\Phi}{d\psi}},$$

et en posant, pour abréger, une de ces fractions égale à α,

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \alpha \frac{d\Psi}{d\varphi}, \quad \frac{d\Phi}{d\psi} = -\frac{1}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\psi}.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (7), on trouve

$$\alpha^2\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2,$$

$$\frac{d\Psi}{d\varphi}=\pm\frac{1}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\psi},\quad \frac{d\Psi}{d\psi}=\pm\alpha\frac{d\Psi}{d\varphi}=\pm\frac{d\Phi}{d\varphi};$$

et, en remettant cette valeur dans la dernière des équations (7),

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{d\Phi}{d\psi}\pm\frac{d\Psi}{d\varphi}\frac{d\Phi}{d\varphi}=0,\quad \frac{d\Phi}{d\psi}=\mp\frac{d\Psi}{d\varphi}.$$

Donc on a

$$\frac{d\Psi}{d\psi}=\pm\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad \frac{d\Phi}{d\psi}=\mp\frac{d\Psi}{d\varphi},$$

puis

$$\frac{d(\Phi+i\Psi)}{d\psi}=\mp\frac{d\Psi}{d\varphi}\pm i\frac{d\Phi}{d\varphi}=\pm i\frac{d(\Phi+i\Psi)}{d\varphi}.$$

Posant, pour abréger, $\Phi+i\Psi=z$, on a

$$\frac{dz}{d\psi}=\pm i\frac{dz}{d\varphi},$$

équation aux différentielles partielles dont l'intégrale générale est

$$(8)\qquad \Phi+i\Psi=f(\varphi\mp i\psi),$$

f étant une fonction arbitraire. Quant au double signe $\mp$, on peut se servir de l'un ou de l'autre. La fonction arbitraire f étant déterminée, l'équation (8) donnera les valeurs de Φ et Ψ en φ et ψ, en égalant dans les deux membres les quantités réelles et imaginaires.

On tire de l'équation (8),

$$d\Phi+id\Psi=f'(\varphi\mp i\psi)(d\varphi\mp id\psi),$$
$$d\Phi+id\Psi=f'(\varphi\pm i\psi)(d\varphi\pm id\psi),$$

et de là

$$d\Phi^2 + d\Psi^2 = f'(\varphi \mp i\psi) f'(\varphi \pm i\psi)(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

$$\frac{d\Phi^2 + d\Psi^2}{d\varphi^2 + d\psi^2} = \frac{dS^2}{ds^2} \cdot \frac{h}{H} = m^2 \frac{h}{H} = f'(\varphi + i\psi) f'(\varphi - i\psi),$$

d'où

$$(9) \qquad m = \sqrt{\frac{H}{h} f'(\varphi + i\varphi) f'(\varphi - i\psi)},$$

où m exprime le rapport de deux éléments linéaires passant par des points correspondants fixés par les valeurs φ et ψ des variables indépendantes.

Ce qu'on vient de voir revient donc à ceci :

Supposons qu'on ait introduit deux variables indépendantes (coordonnées) servant à déterminer la position d'un point quelconque sur une surface donnée, de telle sorte que chaque élément d'une ligne courbe sur cette surface soit exprimé par la formule $\sqrt{h(d\varphi^2 + d\psi^2)}$, ce que nous avons démontré être toujours possible; l'équation (8) servira à déterminer les coordonnées indépendantes Φ et Ψ d'une seconde surface en fonction de φ et ψ, de telle manière qu'à chaque point de la première surface correspond un point de la seconde, et que les éléments triangulaires des deux surfaçes passant par trois points correspondants infiniment voisins soient semblables, les quantités Φ et Ψ devant jouir de la même propriété, qu'un élément linéaire de la seconde surface puisse être exprimé par $\sqrt{H(d\Phi^2 + d\Psi^2)}$.

Une des applications les plus importantes de cette théorie est l'application aux calculs de la haute géodésie; mais nous n'en parlerons pas ici, et nous n'indiquerons que rapidement l'application au tracé des cartes géographiques.

IV.

Supposons que l'une des deux surfaces dont il a été question dans ce qui précède soit un ellipsoïde de révolution, et l'autre un plan. Supposons, en outre, que l'ellipsoïde ait été engendré par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe $2b$, et soit $2a$ son grand axe. Supposons enfin les points de cet ellipsoïde rapportés à trois axes rectangulaires, dont l'origine soit au centre de l'ellipsoïde et dont l'axe des z soit celui de rotation; l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Soient maintenant λ la longitude, β la latitude du point (x, y, z) [*], en supposant que l'ellipsoïde en question soit la surface mathématique de la terre; on trouvera facilement qu'on a

$$x=\frac{a\cos\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\qquad y=\frac{a\sin\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},$$

$$z=\frac{a(1-e^2)\sin\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\qquad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$

de sorte qu'on peut regarder λ et β comme les coordonnées indépendantes (p, q au § I).

On tire de ces équations,

$$\frac{dx}{\lambda}=\frac{-a\sin\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\qquad \frac{dy}{d\lambda}=\frac{a\cos\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\quad \frac{dz}{d\lambda}=0,$$

$$\frac{dx}{d\beta}=\frac{-a\cos\lambda\cos\beta(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\beta)^3}},\qquad \frac{dy}{d\beta}=\frac{-a\sin\lambda\sin\beta(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\beta)^3}},$$

$$\frac{dz}{d\beta}=\frac{a\cos\beta(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\beta)^3}},$$

---

[*] La longitude est l'angle que la courbe méridienne, c'est-à-dire la demi-ellipse passant par le point (x, y, z) et dont le plan passe par l'axe de

et de là (§ I),

$$E = \frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta}, \quad F = 0, \quad G = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^2}.$$

L'équation différentielle (5) est, dans ce cas,

$$\frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta} d\lambda + i \frac{a^2 (1 - e^2) \cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^2} d\beta = 0;$$

donc

$$\nu = \nu' = \frac{1 - e^2 \sin^2 \beta}{a^2 \cos^2 \beta}, \quad h = \frac{1}{E\nu\nu'} = \frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta},$$

et, en multipliant par ν,

$$d\lambda + i \frac{(1 - e^2) d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta} = 0,$$

$$\lambda + i (1 - e^2) \int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta} = \varphi + i \psi,$$

d'où il résulte

$$\varphi = \lambda, \quad \psi = (1 - e^2) \int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta}.$$

Pour trouver cette intégrale, nous ferons $\sin \beta = x$, et nous aurons

$$\int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta} = \int \frac{\cos \beta \, d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \beta)}$$

$$= \int \frac{dx}{(1 - e^2 x^2)(1 - x^2)}$$

$$= \int \left(\frac{dx}{1 + x} + \frac{dx}{1 - x} - e^2 \frac{dx}{1 - ex} - e^2 \frac{dx}{1 + ex} \right) \frac{1}{2(1 - e^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1 - e^2)} l. \left[\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \cdot \left(\frac{1 - e \sin \beta}{1 + e \sin \beta} \right)^e \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^2} l. \left[\operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta \right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin \beta}{1 + e \sin \beta} \right)^{\frac{e}{2}} \right];$$

rotation, fait avec une courbe méridienne déterminée, prise pour première méridienne; elle est comptée de 0 à 360 degrés, et sur la terre, de l'ouest à l'est. La latitude, c'est l'angle que la normale à l'ellipsoïde dans le point (x, y, z) fait avec le plan des xy (l'équateur); elle est comptée sur la terre, du pôle sud au pôle nord, de -90 à $+90$ degrés.

donc enfin,

$$(10)\quad \varphi=\lambda,\quad \psi=l\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right].$$

Quant aux points du plan, nous les rapporterons à deux axes rectangulaires des x et y, et nous aurons pour l'élément linéaire $\sqrt{dx^2+dy^2}$, faisons $\mathrm{H}=1$, $\Phi=x$, $\Psi=y$; donc l'équation (8) sera

$$(11)\quad \begin{cases} x+iy=f\left\{\lambda\mp il\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\beta}{1+e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\} \\ \qquad\quad =f\left\{\lambda\pm il\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}, \end{cases}$$

équation qui déterminera les valeurs de x et y par celles de λ et β, c'est-à-dire qui donnera le point (x, y) du plan qui correspond au point dont la longitude est λ et la latitude β sur l'ellipsoïde. Quant à m, on trouve

$$(12)\quad \begin{cases} m=\sqrt{\begin{aligned} & f'\left\{\lambda+il\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\} \\ & \times f'\left\{\lambda-il\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1+e\sin\beta}{1-e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}\end{aligned}} \\ \qquad \times\dfrac{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}}{a\cos\beta}. \end{cases}$$

En déterminant convenablement la fonction arbitraire f, on trouvera les diverses méthodes employées pour le tracé des cartes géographiques, et l'on verra facilement qu'en déterminant ce tracé par cette équation, on satisfera à la condition la plus naturelle que la carte devra remplir, c'est-à-dire que les éléments de la carte soient semblables aux éléments qu'ils doivent représenter.

Pour ne pas compliquer les calculs, nous supposerons la terre sphérique de rayon a; alors nous aurons $e=0$, et l'équation (11) sera

$$(11') \qquad x+iy=f\left[\lambda \pm il.\operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\right].$$

V.

Soit $f(x)=kx$, k étant une constante; on aura par les équations (11') et (12),

$$x=k\lambda, \quad y=\pm kl \operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right), \quad m=\frac{k}{a\cos\beta}.$$

Nous choisirons le signe inférieur, et nous aurons

$$x=k\lambda, \quad y=kl.\operatorname{cotang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right), \quad m=\frac{k}{a\cos\beta}.$$

Il suit de là que, tant que λ est constant, x le sera aussi, et que y sera constant en même temps que β; donc la carte sera telle, que les méridiens sont représentés par des lignes droites parallèles à l'axe des y, et les cercles de même latitude (parallèles à l'équateur) par des droites parallèles à l'axe des x. L'origine des x, y représente le point dont la longitude et la latitude sont zéro. L'axe des x ($y=0$) représente l'équateur, l'axe des y ($x=0$) le premier méridien. Quant à la valeur de m, elle est k pour les points sur l'équateur ($\beta=0$), et elle devient d'autant plus grande que β se rapproche de $\pm 90^\circ$, c'est-à-dire dès qu'on le rapproche des pôles. Une telle carte ne peut donc jamais contenir les pôles.

On aura déjà remarqué qu'une carte telle que nous venons de la décrire est une carte maritime exécutée d'après Mercator.

Soit $f(x)=ke^{ix}$, k étant une constante; on trouvera

$$x=\frac{k\cos\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}, \quad y=\frac{k\sin\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}, \quad m=\frac{k}{a(1+\sin\beta)},$$

en ne retenant que le signe inférieur.

Il suit de là

$$y = x \tan\!g\,\lambda, \quad x^2 + y^2 = k^2 \tan\!g^2\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right),$$

c'est-à-dire que les méridiens sont représentés par des lignes droites passant par l'origine des coordonnées, les parallèles sont représentés par des cercles dont le centre est à l'origine des coordonnées; k est le rayon du cercle représentant l'équateur $(\beta = 0)$; l'origine des coordonnées représente le pôle nord (λ quelconque, $\beta = 90^\circ$). L'axe positif des x $(y = 0)$ représente le premier méridien, l'axe des y celui de 90 degrés. La valeur de m varie de $\frac{k}{a}$ à $\frac{k}{2a}$; donc, la défiguration ne sera point très-grande. On sait que cette espèce de carte est une de celles par lesquelles on représente les hémisphères (projection stéréographique, l'hémisphère boréal étant vu du pôle austral).

Faisons enfin

$$f(x) = \frac{k}{i}\,\frac{e^{xi} - 1}{e^{xi} + 1},$$

et retenons le signe inférieur; nous aurons

$$x = \frac{k \sin\lambda \cos\beta}{1 + \cos\lambda\cos\beta}, \quad y = \frac{k \sin\beta}{1 + \cos\lambda\cos\beta},$$

$$m = \frac{k}{a(1 + \cos\lambda\cos\beta)},$$

et, par suite,

$$x^2 + y^2 + 2kx \operatorname{cotang}\lambda = k^2,$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2k}{\sin\beta}\,y = -k^2.$$

Donc les méridiens seront représentés par des cercles de rayon variable $\frac{k}{\sin\lambda}$, dont les coordonnées du centre sont $-k \operatorname{cotang}\lambda$, 0; les parallèles seront représentés

aussi par des cercles de rayon variable k cotang β, et dont les coordonnées du centre sont o, $\frac{k}{\sin\beta}$.

L'origine des coordonnées est le point $\beta = 0$, $\lambda = 0$; l'axe des x l'équateur ($y = 0$, $\beta = 0$), l'axe des y le premier méridien ($x = 0$, $\lambda = 0$). Quant à la valeur de m, elle varie de $\frac{k}{a}$ à $\frac{k}{2a}$. On sait que cette espèce de carte est employée pour les mappemondes (projection stéréographique, l'hémisphère étant vu d'un point de l'équateur).

Comme il s'agissait seulement d'indiquer l'application des principes exposés aux §§ I et III, nous n'ajouterons rien à ce qui précède, et nous ferons remarquer seulement que ces principes reçoivent leur application dans la théorie des calculs de haute géodésie, et que M. Gauss en a exposé les éléments dans ses recherches intitulées : *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodæsie.*

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — EXÉCUTION DES ÉPURES

(Extrait d'une Lettre à M. Terquem);

PAR M. BARDIN.

Depuis quelque temps, mon cher collègue, j'ai de nombreux rapports avec des candidats aux prochains concours. Je trouve ces jeunes gens généralement bien préparés sur les méthodes générales ; mais pour ce qui regarde l'exécution des épures, ils sont sans industrie graphique. Aussi le plus petit incident les embarrasse-t-il. Or cette industrie leur est nécessaire aujourd'hui que, renonçant à reproduire les épures gravées des auteurs, ils se livrent

à l'imprévu des solutions entreprises sur des données choisies par eux, et pas toujours heureusement choisies; donc je crois faire une chose utile en vous communiquant quelques-uns de ces petits moyens qui me paraissent ignorés.

Dans le choix des données et dans leurs constructions, les élèves font un usage exclusif de la représentation des plans par leurs traces. Quoi de plus incommode, cependant, que ces lignes qui tombent presque toujours en dehors du cadre de leurs épures, et qui allongent les opérations! Dès 1826, aux leçons des cours industriels de Metz, je remplaçais les traces par deux droites se coupant et respectivement parallèles aux traces; de sorte qu'un plan était donné par l'angle (HAV—H'A'V'), (AH—A'H') étant une parallèle au plan horizontal, (AV —A'V') une parallèle au plan vertical, et (A—A') leur point de rencontre. Ces deux lignes remarquables, qui représentent si bien le plan, je les nommais l'*horiligne* et la *vertiligne* (*) du point A de ce plan, croyant avoir satisfait aux lois de l'euphonie et de l'étymologie. Si ces deux noms vous paraissent bien constitués et viables, aidez-les à faire leur chemin dans l'enseignement, où ils éviteraient la redite fastidieuse de ces deux longues désignations : *la parallèle au plan horizontal* et *la parallèle au plan vertical* (**). Rien de plus facile, d'ailleurs, que de passer de la représentation par les traces à tout autre mode de représentation, soit par

(*) Dans le système des projections rectangulaires, il passe par tout point A d'un plan quatre droites remarquables : une *parallèle au plan horizontal* et une *parallèle au plan vertical*, qui définissent ensemble le plan donné, un des plans en nombre infini qu'on peut imaginer par le point A; une *droite de plus grande inclinaison sur le plan horizontal* et une *droite de plus grande inclinaison sur le plan vertical*, dont une seule suffit pour définir le même plan.

(**) Accepteriez-vous le nom de *diaplane* que je donnais à la *droite d'intersection de deux plans?* Vous aimez peu les néologues, je le sais.

un triangle ou par toute autre figure plane, soit par l'horiligne et la vertiligne, soit par une trace et une inclinaison, soit par la droite de plus grande inclinaison sur l'un des plans de projection, etc.

Revenant aux traces, je m'étonne de ne pas trouver les élèves plus exercés à déplacer les plans de projection, par exemple à relever le plan horizontal et à rapprocher le plan vertical, comme le besoin s'en fait fréquemment sentir, notamment pour ramener dans le cadre des épures les constructions qui s'en échappent; et à faire des *projections auxiliaires*, qui donnent de si élégantes simplifications, ou tout au moins des vérifications promptes à réaliser. L'énoncé suivant, dans lequel se résume presque tout le chapitre de la ligne droite et du plan, en offre un exemple : « Construire les projections d'une pyramide tronquée dont la position et les dimensions sont déterminées, et en calculer le volume. »

Après avoir construit les projections d'un polygone égal en vraie grandeur à la base de la pyramide; après avoir élevé au plan de ce polygone une perpendiculaire égale à la vraie hauteur de la pyramide, et en avoir déduit immédiatement les projections de ce corps, il faut tronquer ce même corps par un plan donné de position; le tronquer, je suppose, par un plan perpendiculaire à l'une des arêtes latérales, et distant du sommet d'un certain nombre de centimètres, plus ou moins, selon la grandeur de la pyramide. C'est cette dernière opération qu'on simplifie beaucoup en ayant recours à une troisième projection sur un plan perpendiculaire à une horiligne du plan de tronquement, ou, si la place manque pour le rabattement de cette projection, sur un plan perpendiculaire à une vertiligne; projections dans chacune desquelles la face de troncature se réduit évidemment à une droite, particularité d'où naît précisément la simplification énoncée, qui est de plus un

procédé général. On le trouve recommandé dans la section plane d'un cylindre.

Qu'on substitue à la pyramide un prisme, et la série des opérations précédentes reste; le résultat est un prisme tronqué.

Il est un autre procédé de tronquement aussi facile à exécuter, en quelque sorte, qu'à concevoir. Soit à tronquer une pyramide quadrangulaire S.ABCD dont les projections font connaître les deux plans diagonaux ASC, BSD, et leur droite d'intersection SO : trois points *a*, *b*, *c* étant pris à volonté sur les trois arêtes SA, SB, SC, on en déduit immédiatement : 1° une diagonale *ac* de la face cherchée et sa rencontre *o* avec SO; 2° la seconde diagonale *bo* qui coupe la quatrième arête SD au point *d* où cette arête va rencontrer le plan des trois points *a*, *b*, *c*, et achever le tronquement. Si la pyramide donnée était pentagonale, on la décomposerait en deux autres; l'une quadrangulaire et l'autre triangulaire, etc. Ce procédé, qui s'applique aux prismes comme aux pyramides, et, par suite, aux cônes et aux cylindres, fournit le moyen de construire avec une extrême promptitude les projections d'un polyèdre quelconque, en partant d'un prisme ou d'une pyramide, et de se donner dans l'espace une section conique, en l'appuyant sur la surface d'un cône droit ou oblique.

De peur de m'étendre trop, j'en resterai là d'un sujet auquel j'ai à peine touché, et je donnerai l'énoncé de ce que l'on pourrait appeler une *épure générale;* épure qui doit être faite par plusieurs élèves traitant en commun une même question générale. Reprenant l'énoncé précédent, pour assujettir le polygone de la base à la condition d'occuper sur le plan donné une position telle, que l'un de ses côtés fasse un angle déterminé avec le plan hori-

zontal de projection, et supposant construites les projections de la pyramide, je demande :

1°. De développer la surface du solide polyédral, et, à l'aide du développement convenablement découpé et plié, d'exécuter en relief ce solide. — On s'assure, par cette facile stéréotomie en papier, que le corps obtenu est exact, c'est-à-dire que sa surface *se ferme* sous le nombre déterminé de ses faces.

2°. De construire, en se servant du développement, l'angle qui mesure l'inclinaison de deux faces contiguës. — On a alors les données nécessaires pour expliquer comment ce corps peut être exécuté, non plus par sa surface, mais en une matière solide, et pour faire comprendre en peu de mots le triple objet de la géométrie descriptive, qui est de concevoir par la pensée une forme définie, de la représenter à l'aide des procédés du dessin des projections, et de l'exécuter en relief. Les élèves, s'ils étaïent convaincus de bonne heure de l'utilité et même de l'importance du dessin des projections, se livreraient avec plus d'intérêt aux exercices de cet art.

3°. De mesurer la plus courte distance qui sépare deux arêtes non situées dans un même plan.

4°. De faire subir au solide pyramidal quelques mouvements géométriques simples, par exemple un mouvement de transport parallèle, ou bien un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal, vertical ou quelconque, etc.

5°. De supposer le corps éclairé par des rayons parallèles ou par un centre lumineux rayonnant, et de déterminer géométriquement les parties de la surface et des plans de projection qui sont privées de lumière.

6°. De déduire du plan et de l'élévation du corps ainsi éclairé, une projection concourante ou perspective dont

le plan de projection et le point de concours sont donnés, etc.

On pourrait demander que la pyramide fût appuyée sous le plan donné au lieu de l'être au-dessus, ou bien encore qu'elle fût creusée dans le plan, comme elle le serait sur une des faces d'un solide polyédral. Toutes les opérations resteraient les mêmes; le résultat seul se présenterait différemment. Ce qui précède suffit pour montrer quelle variété sans bornes, pour ainsi dire, on rencontre dans les questions qui fournissent des sujets aux épures de la géométrie descriptive.

Les sections planes du cône du second ordre, qu'on peut réunir sur une même feuille, sans confusion dans le résultat et sans complication dans le travail graphique, offrent l'exemple d'une *épure générale* facile à faire par un même élève. Il en existe beaucoup d'autres.

Note. Les principes de la stéréotomie des polyèdres sont très-clairement exposés dans les *Leçons nouvelles de Géométrie descriptive* que vient de publier M. le professeur A. Amiot. Cet ouvrage est rédigé dans le même esprit que la *Géométrie* du même auteur, dans un très-bon esprit. Des changements opportuns dans les plans de projection sont indiqués avec soin; ces changements sont la base des épures de la charpente; on y rencontre aussi ce qu'il est nécessaire de savoir sur les contacts et les intersections des surfaces pour exécuter avec intelligence les épures de la coupe des pierres. La marche est didactique et les raisonnements visent à la rigueur. C'est le cachet des professeurs universitaires. Puissent-ils le conserver! *Odi profanum vulgus et arceo*, telle doit être la devise de l'Université. Il s'agit de repousser la vulgarité des idées, les quasi-raisonnements, qui énervent et faussent la raison. La logique *utilitaire* est aussi funeste, dans l'enseignement classique, que la morale *utilitaire* dans l'éducation publique et privée. Ce n'est ni cette logique ni cette morale que professe le vertueux recteur de l'ancienne Université, dans son *Traité des Études*.

SOLUTION DE LA QUESTION 254

(voir t. XI, p. 118);

PAR M. L'ABBÉ L. CLAUDE,
De la maison ecclésiastique de Vals (Haute-Loire).

Soient, dans un même plan,

A, B, C, trois points situés sur la droite X;
A′, B′, C′, trois points situés sur la droite X′;
A″, B″, C″, trois points situés sur la droite X″.

Formons un système de neuf droites,

$$\begin{array}{lll} A'A'', & B'B'', & C'C'', \\ A''A, & B''B, & C''C, \\ AA', & BB', & CC', \end{array}$$

où AA′ est la droite qui passe par les points A et A′, et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf points,

$$\begin{array}{lll} B'B''.C'C'', & C'C''.A'A'', & A'A''.B'B'', \\ B''B.C''C, & C''C.A''A, & A''A.B''B, \\ BB'.CC', & CC'.AA', & AA'.BB', \end{array}$$

où B′B″.C′C″ est le point d'intersection des droites B′B″ et C′C″, etc.

Si les points de l'une quelconque des colonnes verticales sont en ligne droite, les points des deux autres lignes verticales sont aussi en ligne droite; les trois droites se rencontrent en un même point (*), et les trois droites X, X′, X″ se rencontrent aussi en un même point. La réciproque a lieu.

(*) Ou sont parallèles entre elles. Cette addition doit être faite partout où il est sujet de la convergence de trois droites en un même point. (*Voir* le corollaire du lemme 1.)

Soient, dans un même plan,

A, B, C, trois droites concourant au point X;

A′, B′, C′, trois droites concourant au point X′;

A″, B″, C″, trois droites concourant au point X″.

Formons un système de neuf points (tableau 1), où A′ A″ est maintenant le point d'intersection des droites A′ et A″, et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf droites (tableau 2), où B′B″, C′C″ est maintenant la droite qui passe par les points B′B″ et C′C″, etc. Si les droites de l'une quelconque des colonnes verticales concourent en un même point, il en sera de même des droites des deux autres colonnes verticales; les trois points de concours sont sur une même droite, et les trois points X, X′, X″ sont aussi sur une même droite. La réciproque a lieu.

Donner une démonstration géométrique sans figure, ou une démonstration algébrique sans calculs. (Cayley.)

1. *Lemme*. Deux triangles quelconques étant tellement disposés sur un plan, que leurs sommets respectifs s'appuient, deux à deux, sur trois droites convergeant en un même point, les côtés opposés aux sommets qui se correspondent iront concourir, dans le même ordre, en trois points situés en ligne droite. (Poncelet, *Propr. project.*, sect. II, chap. I.)

2. *Corollaire*. Si les trois droites, au lieu de converger en un même point, sont parallèles entre elles, la même propriété a lieu. Cette proposition est manifeste par la considération des limites.

3. *Lemme*. Réciproquement, si ces côtés concourent, deux à deux, en trois points situés en ligne droite, les droites qui joignent dans le même ordre les sommets correspondants des triangles iront converger en un même point (ou seront parallèles). (Poncelet, *id.*)

4. THÉORÈME I. *Démonstration*. Supposons les points de la première ligne verticale en ligne droite ; ces trois points sont les sommets de trois triangles dont les autres sommets respectifs B et C, B′ et C′, B″ et C″ s'appuient sur les trois droites X, X′, X″. Donc (lemme 3) ces trois droites sont parallèles ou convergent en un même point. Les deux triangles AA′A″, CC′C″ ayant leurs sommets respectifs sur les trois droites X, X′, X″ parallèles ou convergeant en un même point, les côtés opposés aux sommets correspondants iront concourir dans le même ordre en trois points situés en ligne droite (lemme 1 ou 2); donc les trois points de la seconde ligne verticale sont en ligne droite. Il en est de même de ceux de la troisième. puisque les triangles AA′A″, BB′B″ ont leurs sommets sur les mêmes droites X, X′, X″.

Désignons par D, D′, D″ les trois droites que nous venons de former, et considérons deux des trois triangles dont les sommets s'appuient, deux à deux, sur ces trois droites, par exemple les deux triangles

(B′B″.C′C″, C′C″.A′A″, A′A″.B′B″)

et

(B″B.C″C, C″C.A″A, A″A.B″B),

dont les sommets respectifs sont les points des deux premières lignes horizontales (tableau 2). Leurs côtés concourent, deux à deux, aux trois points A″, B″, C″, situés sur la droite X″. Donc (lemme 3) les droites D, D′, D″ convergent en un même point ou sont toutes trois parallèles.

5. *Réciproque*. Si les trois droites X, X′, X″ sont parallèles ou concourent en un même point, les points de l'une quelconque des colonnes verticales sont en ligne droite, et ces trois droites sont parallèles ou se rencontrent en un même point.

Cette réciproque a déjà été démontrée, puisque c'est sur elle que nous nous sommes appuyé pour démontrer que les points des deux dernières colonnes verticales étaient respectivement en ligne droite.

6. Théorème II. Ce théorème n'étant que le corrélatif du précédent, s'en déduit immédiatement d'après la théorie de la corrélation des figures; nous allons toutefois en donner la démonstration directe.

Démonstration. Supposons que les droites de la première colonne verticale soient parallèles ou convergent vers un point P; les sommets des deux triangles

$$(B'B'', B''B, BB')$$

et

$$(C'C'', C''C, CC')$$

s'appuient sur ces trois droites; donc (lemme 1 ou 2) les points de concours X, X′, X″ des côtés respectifs sont en ligne droite. Les côtés des deux triangles

$$(C'C'', C''C, CC')$$

et

$$(A'A'', A''A, AA')$$

concourent, deux à deux, en ces points; par conséquent (lemme 3), les droites de la seconde colonne verticale concourent en un même point P′ ou sont parallèles; il en est de même des droites de la troisième colonne verticale.

Supposons que ces trois systèmes se composent de droites non parallèles entre elles, mais concourant respectivement aux points P, P′, P″. Les deux triangles ayant pour côtés respectifs les droites des deux premières lignes horizontales (tableau 2) ont leurs sommets s'appuyant deux à deux sur les trois droites A″, B″, C″ qui concourent en X″. Donc (lemme 1) les trois points P, P′, P″, où vont concourir les côtés correspondants, sont en ligne droite.

7. *Réciproque.* Si les trois points X, X′, X″ sont en ligne droite, les droites de l'une quelconque des lignes verticales sont parallèles entre elles ou concourent en un même point, et dans ce dernier cas, les trois points de concours sont en ligne droite.

Cette réciproque a déjà été démontrée.

QUESTION 248 (Goldbach);

PAR M. PH. BÉDOS,
Élève en mathématiques supérieures, maison de l'Assomption à Nîmes.

$4mn - m - 1$ ne peut être un carré (sous-entendu m et n étant des nombres entiers).

Démonstration. Soit $4mn - m - 1 = a^2$. Si je diminue m et n de m'' et n'', le premier membre de cette équation diminuera de $4mn'' + 4nm'' - 4m''n'' - m''$, et pour qu'après cette diminution l'expression devienne $(a-1)^2$, il faut que

$$4mn'' + 4nm'' - 4m''n'' - m'' = 2a - 1.$$

De cette équation je tire

$$4n'' = \frac{(4mn - 1)m'' - 2a + 1}{m'' - m},$$

$$4n'' = 4n - 1 + \frac{4mn - m - 2a + 1}{m'' - m};$$

et, en posant

$$m'' = 4mn - 2a + 1,$$

on a

$$n'' = n.$$

On a donc pour m'' et n'' des valeurs entières; d'où il suit que si a^2 est un carré contenu dans la formule donnée,

$(a - 1)^2$ y sera aussi contenu. On arrivera ainsi aux premiers carrés 4 et 1. En posant

$$4mn - m - 1 = 1,$$

on a

$$m = \frac{2}{4n - 1},$$

équation résolue en nombres entiers en faisant

$$n = 0, \quad m = -2.$$

Mais si je pose

$$4mn - m - 1 = 4,$$

d'où

$$m = \frac{5}{4n - 1},$$

cette équation ne peut être résolue en nombres entiers.

Donc la formule donnée ne peut contenir le carré 4 ni aucun carré supérieur ; elle contient le carré 1, et aussi, si l'on veut, le carré 0, en faisant $n = 0$ et $m = -1$.

Démonstration d'Euler.

1. *Lemme.* La somme de deux carrés n'admet pas de diviseur de la forme $4n - 1$ (Fermat).

2. L'équation

$$4mn - m - 1 = a^2$$

est impossible ; il s'ensuivrait que

$$m = \frac{a^2 + 1}{4n - 1},$$

ce qui est contraire au théorème précédent.

3. *Corollaire.* $\frac{a^2 + 1}{4n - 1}$ est un nombre fractionnaire ; donc

$$\frac{a^2 + 1}{4n - 1} + 1 = \frac{a^2 + 4n}{4n - 1}$$

est aussi un nombre fractionnaire, ou bien

$$\frac{b^2+n}{4n-1} = \text{nomb. fract.};$$

de là

$$\frac{b^2+n}{4n-1}+n = \frac{b^2+4n^2}{4n-1} = \text{nomb. fract},$$

ou bien

$$\frac{c^2+4^2}{4n-1} = \text{nomb. fract.};$$

de là

$$\frac{c^2+n^2}{4n-1}+n^2 = \frac{c^2+4n^3}{4n-1} = \text{nomb. fract.},$$

ou

$$\frac{d^2+n^3}{4n-1} = \text{nomb. fract.};$$

et, en général,

$$\frac{a^2+n^\alpha}{4n-1}$$

ne peut être un nombre entier m, où α est un nombre entier positif; donc l'équation

$$4mn - m - n^\alpha = a^2$$

est impossible; ainsi $a^2 + n^\alpha$ n'admet pas de diviseur de la forme $4n - 1$.

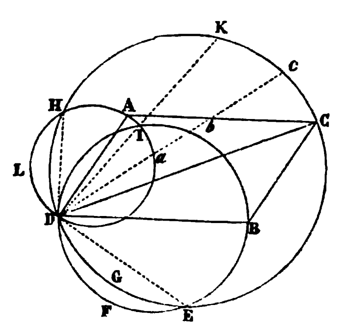
4. Euler se sert du signe $\pm$ pour désigner l'impossibilité; ainsi $x^m + y^m \pm z^m$, lorsque m n'est pas égal à 2, exprime un théorème de Fermat. Ce signe très-commode est de Goldbach; il n'a été admis, que je sache, que par Euler. C'est une impossibilité d'un autre genre que l'imaginarité.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU PARALLÉLOGRAMME DES FORCES ET THÉORÈME SUR DES FORCES CONCOURANTES;

D'après M. MÖBIUS.

1. *Lemme.* Étant donné un système de cercles, dans le même plan et passant par le même point; si par ce point on mène deux sécantes, elles interceptent sur les cercles des arcs semblables.

2. *Lemme.* Mêmes données; si l'on mène par le point commun une sécante, et que par tous les points où cette sécante rencontre les cercles, on prenne respectivement sur chaque cercle et du même côté des arcs semblables, les extrémités de ces arcs ainsi obtenues sont sur une droite passant par le point d'intersection commun.



3. *Lemme.* Soit le parallélogramme ADBC : sur les côtés DA, DB et sur la diagonale DC, comme diamètre, on décrit trois circonférences; désignons ces trois circonférences par les lettres A, B, C : menant par le point D

une sécante qui coupe la circonférence

A en a,
B en b,
C en c,

on a : 1°. $Dc = Da + Db$.

2°. Le côté	AC	passe par l'intersection	H	des cercles A et C,
	BC		E	B et C,
la diagonale	AB		I	A et B.

3°. La corde DE sous-tend dans le cercle B un arc DFE qui mesure le double de l'angle DBE = 2.ADB, et la même corde DE sous-tend dans le cercle C un arc DGE qui mesure le double de l'angle DCE = 2.ADE.

4. Théorème. *Si dans le parallélogramme* ADBC, *les côtés* DA, DB *représentent en grandeur et en direction deux forces appliquées en* D, *la diagonale* DC *représente en grandeur et en direction la résultante de deux forces représentées par les côtés.*

Démonstration. Mêmes données et mêmes constructions que dans le lemme 3. Deux cas sont à distinguer :

1er *cas*. Le rapport de chacun des angles ADC, CDB à l'angle droit est *rationnel*. Supposons donc la circonférence divisée en m parties *égales*, et que ADC, CDB renferment respectivement p et q de ces parties, de sorte que l'angle ADB renferme $p+q$ de ces parties; concevons maintenant qu'on partage chacune des trois circonférences A, D, B en m parties égales, et que le point D soit un point de division dans chacune. L'arc DFE, qui mesure l'angle 2ADB (lemme 3) renferme donc $2(p+q)$ de ces divisions, et le point E est un point de division dans le cercle B; par la même raison, il est un point de division dans le cercle C, car l'arc DGE, mesurant le double de l'angle ADC, renferme $2p$ de ces parties. D étant un point de division dans le cercle A, il s'ensuit

que la sécante DE contient un point de division de chacune des trois circonférences. Donc, en vertu du lemme 2, le $x^{ième}$ point de division du cercle A, le $(x+2p)^{ième}$ du cercle C, le $(x+2p+2q)^{ième}$ dans le cercle B, sont en ligne droite avec le point D, et la portion de cette droite interceptée par le cercle C est égale à la somme des cordes interceptées par les cercles A et B (lemme 3). Cela posé, menons du point D des droites aux $m-1$ autres points de division du cercle A, et supposons que toutes ces cordes représentent en grandeur et en direction des forces appliquées en D. Faisons de même dans le cercle B et le cercle C; a, b, c étant des points de division en ligne droite avec D, la force Dc est la résultante des forces Da et Db (lemme 3). Soient α, β, γ les résultantes respectives des forces agissant dans les cercles A, B, C; il est évident que γ est la résultante des deux forces α et β. Or, le diamètre DA, axe de symétrie par rapport aux points de division du cercle A, représente en direction la force a; par une raison analogue, les diamètres DC, DB sont les directions des forces γ et β; mais les cercles, avec les systèmes de cordes, sont des figures semblables; donc les forces α, β, γ sont proportionnelles aux diamètres DA., DB, DC: de là les forces représentées en grandeur et en direction par DA et DB ont pour résultante une force représentée en grandeur et en direction par la force DC. C. Q. F. D.

2e *cas*. Le rapport des angles ADC, CDB à l'angle droit est *irrationnel*. On démontre ce second cas à l'aide du premier, par les méthodes connues.

4. Théorème. *Soit un système de forces dans l'espace, agissant sur un point et représentées par des longueurs données, ainsi que leur résultante. Si l'on décrit des sphères sur toutes ces longueurs comme diamètres, et que l'on mène par le point de concours des forces une sécante quelconque, la portion de cette sécante in-*

terceptée par la sphère décrite sur la résultante, est égale à la somme algébrique *des portions interceptées par les autres sphères.*

Cette ingénieuse démonstration et ce beau théorème, qui établissent une nouvelle connexion entre la mécanique et la géométrie, sont dans l'ouvrage allemand intitulé : *Lehrbuch der Statik*, publié en 1837 à Leipsig, en deux vol. in-8, par M.r Auguste-Ferdinand Möbius, professeur d'astronomie à Leipzig. C'est un Traité complet de statique, déduite par une logique sévère, d'un seul principe. Le célèbre professeur, prenant pour point de départ *le couple*, en fait découler toutes les propositions de l'équilibre des forces dirigées d'une manière quelconque. *Le couple!* magnifique création française, admirable de simplicité, de lucidité, de fécondité, et toutefois on prétend le proscrire au bénéfice de la nuageuse conception des *forces vives*, sous le nom commercial de *quantités de travail.* Dans cet ouvrage, on ne parle nullement des machines; excellente omission. La théorie des machines doit trouver sa place dans la dynamique, et pas dans la statique, qui ne peut en donner que des notions insuffisantes, sujettes à de graves erreurs qu'Euler a signalées depuis longtemps ; mais à cause de cela, vouloir supprimer la statique est une entreprise folle et anti-pédagogique. De même que l'arithmétique n'existe pas uniquement pour des opérations de banque, ou la géométrie pour des levés de terrains, de même la mécanique n'est pas renfermée dans les ateliers et les usines. Que des hommes devant leur existence, leur réputation aux ateliers et aux usines, veuillent nous faire croire que les engins et les machines sont seuls dignes de nos considérations, je le conçois très-bien; mais que ces intérêts individuels doivent servir de régulateur à l'enseignement général, c'est ce qu'on ne me fera jamais comprendre. Tout ceci me fait penser à la

Chine. Dans ce céleste empire, la recherche du *beau*, du *vrai*, en un mot la recherche de l'*utilité morale* n'est pas le but; mais la recherche de l'*utilité matérielle*, corporelle, immédiate, tel est l'unique but. Voici comment s'exprime à ce sujet un des hommes les plus savants, les plus judicieux de France, célèbre chimiste, excellent écrivain :

« Une nation remarquable par son antiquité, sa population et l'habileté qu'elle a montrée dans la pratique des arts utiles, est le peuple chinois. Ce qu'il a voulu autrefois, il le veut encore aujourd'hui : c'est l'*application*, c'est l'*utilité immédiate des choses*. Mais ni les arts chimiques ni les arts mécaniques ne peuvent atteindre à la perfection où ils sont parvenus dans l'Europe occidentale, sans l'étude des sciences mathématiques, physiques et chimiques cultivées au point de vue de la plus grande *abstraction* possible, parce que cette étude donne seule les moyens d'assujettir les procédés des arts aux préceptes et aux règles qui en assurent l'exécution, en même temps qu'elle seule préside à la confection de toute machine et de tout instrument de précision, sans lesquels les progrès des sciences du monde extérieur sont impossibles. C'est donc parce que cette étude a manqué à la Chine, que le développement de l'industrie y a été borné aux progrès que chaque art a dus aux uniques efforts des ouvriers qui l'ont pratiqué.

» Si nous considérons maintenant que les fonctions de l'administration de ce pays sont exclusivement dévolues aux *lettrés*, et que ce titre, loin d'être un privilége aristocratique, appartient à tout individu, quelle que soit son origine, qui fait preuve publique d'un *savoir suffisant* pour être jugé digne de l'obtenir, on voit qu'il n'y a plus de motifs pour que cet individu porte son attention, sa pensée sur des objets dont l'étude ne le conduirait à

rien ou ne lui donnerait pas les avantages qu'il est sûr d'obtenir en s'engageant dans une voie connue, qui, toujours ouverte au savoir, a dû être l'objet constant de son ambition. Les lettrés, appliquant leurs facultés intellectuelles à l'administration, ne sont plus tentés de se livrer à des spéculations philosophiques qui, pour eux, seraient absolument stériles, parce qu'elles manqueraient d'*utilité immédiate*. Les deux causes qui, jusqu'ici, se sont incessamment opposées aux progrès des arts et des sciences à la Chine, expliquent parfaitement le fait, si étonnant au premier abord, que les Chinois, après avoir eu connaissance de la poudre à canon, du papier, de l'imprimerie et de l'aiguille aimantée, longtemps avant les Européens, ont été bien loin pourtant d'en tirer le même parti que ces derniers, soit que l'on ait égard aux perfectionnements apportés à ces découvertes, soit qu'on ait égard à l'influence exercée par elles sur l'état de la société dans les deux populations. » (*Journal des Savants*, 1845, p. 331-332.)

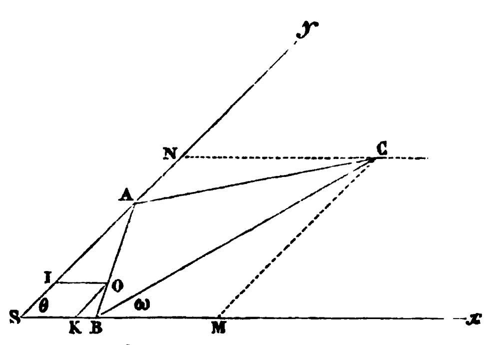
Il y a sept ans que l'illustre M. Chevreul parlait ainsi du système scolaire chinois, et prophétiquement d'un autre système que je n'ai pas besoin de nommer. Qui est l'auteur de ce système impie? l'orgueil. On ne se rappelle jamais ce que disait, il y a dix-huit cents ans, une puissante intelligence maniée par un divin caractère : « Εἰ γὰρ δοκεῖ τις εἶναί τι, μηδὲν ὤν, ἑαυτὸν φρεναπατᾷ ; *car si quelqu'un s'estime être quelque chose, il se trompe lui-même, parce qu'il n'est rien.* » (Saint Paul *aux Galates*, ch. VI, 3.)

SOLUTION DE LA QUESTION 47

(voir t. IV, p. 319) ;

PAR M. A. FRANCK, ÉLÈVE,
Institution Coutant.

Par un point O donné dans un angle ASB, on mène une sécante AB terminée aux côtés de l'angle. Sur AB on construit un triangle ABC semblable à un triangle donné. On demande le lieu du sommet C.



Solution. Prenons pour axes des x et des y les côtés SB et SA de l'angle ; soient

x et y l'abscisse et l'ordonnée de C,
p et q l'abscisse et l'ordonnée de O,
N et M les pieds de l'ordonnée et de l'abscisse de C,
K et I les points correspondants des coordonnées de O.

Désignons de plus par $m \sin A$, $m \sin B$, $m \sin C$ les côtés du triangle ABC respectivement opposés aux angles A, B et C; par θ l'angle des axes, et par ω l'angle CBM du côté CB avec l'axe des z.

En considérant successivement les quatre triangles

CMB, CNA, OKB et OIA, nous aurons les relations

$$y = \frac{m \sin A \sin \omega}{\sin \theta}, \quad x = \frac{m \sin B(\theta + C - \omega)}{\sin \theta},$$

$$OB = \frac{q \sin \theta}{\sin(B + \omega)}, \quad OA = \frac{p \sin \theta}{\sin(B + \omega - \theta)}.$$

Ajoutant les valeurs de OB et de OA, il viendra

$$OB + OA = m \sin C = \frac{\sin \theta [q \sin(B - \theta + \omega) + p \sin(B + \omega)]}{\sin(B + \omega) \sin(B + \omega - \theta)}.$$

Si nous divisons entre elles, membre à membre, les équations donnant les valeurs de x et de y en fonction de ω, nous aurons

$$(1) \qquad y \sin B \sin(\theta + C - \omega) = x \sin A \sin \omega.$$

Multiplions membre à membre les équations qui donnent y et $m \sin C$; remplaçant x par sa valeur, nous aurons une seconde équation ne contenant plus que des lignes trigonométriques de l'angle ω, et qui est

$$(2) \qquad \begin{aligned} &= y \sin C \sin(B + \omega) \sin(B - \theta + \omega) \\ &= \sin A \sin \omega [q \sin(B - \theta + \omega) + p \sin(B + \omega)]. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de tirer des équations (1) et (2) une relation entre x et y, indépendante de l'angle ω. Pour cela développons ces équations, en posant pour plus de simplicité $\theta + C = \varphi$ et $B - \theta = \psi$; nous aurons ainsi les deux équations

$$y \sin B (\sin \varphi \cos \omega - \cos \varphi \sin \omega) = x \sin A \sin \omega,$$

$$\begin{aligned} y \sin C (\sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega)(\sin \psi \cos \omega + \cos \psi \sin \omega) \\ = \sin A \sin \omega [q (\sin \psi \cos \omega + \sin \omega \cos \psi) \\ + p (\sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega)]. \end{aligned}$$

Divisons les deux membres de la première par $\sin \omega$, et les deux membres de la seconde par $\sin^2 \omega$; les deux dernières équations se transformeront ainsi dans les deux

suivantes, ne contenant plus que cotang ω :

$$y \sin B (\sin \varphi \operatorname{cotang} \omega - \cos \varphi) = x \sin A,$$

$$y \sin C (\sin B \operatorname{cotang} \omega + \cos B)(\sin \psi \operatorname{cotang} \omega + \cos \psi)$$
$$= \sin A [q (\sin \psi \operatorname{cotang} \omega + \cos \psi) + p (\sin B \operatorname{cotang} \omega + \cos B)];$$

ou, ordonnant par rapport à cotang ω,

$$y \sin B \sin \varphi \operatorname{cotang} \omega = x \sin A + y \sin B \cos \varphi$$

et

$$y \sin C \sin B \sin \psi \operatorname{cotang}^2 \omega$$
$$+ [y \sin C \sin (\psi + B) - \sin A (q \sin \psi + p \sin B)] \operatorname{cotang} \omega$$
$$+ y \sin C \cos B \cos \psi - q \sin A \cos \psi - p \sin A \cos B = 0.$$

Éliminant cotang ω, nous aurons, en ordonnant par rapport à y et x, une équation qui représente une courbe du second degré passant par l'origine, et qui a évidemment des branches infinies. Les coefficients de y et de x contiennent seuls p et q, et ces deux quantités se trouvent l'une ou l'autre à tous les termes. Si donc on change p en mp et q en mq, c'est-à-dire si l'on transporte le point O en un autre point de la ligne SO, l'équation de la nouvelle courbe ne différera de la première que par un facteur constant multipliant les coefficients de x et de y. Ce facteur sera évidemment le rapport de similitude des deux courbes par rapport à l'origine.

Note. Les côtés AC, BC du triangle ABC sont chacun l'enveloppe d'une parabole; SA est une tangente à la parabole enveloppe de AC, et SB la tangente à la parabole enveloppe de BC; le point O est le foyer commun; de sorte que le lieu géométrique fournit une belle propriété de deux paraboles unifocales. Le foyer commun étant un centre d'homologie, point qui reste tel en projection, on déduit une propriété générale relativement à un centre d'homologie de deux coniques quelconques. Nous devons à l'obligeance de M. Chasles cette intéressante observation. L'équation du lieu peut se mettre sous cette forme symétrique,

$$y^2 \sin B \sin C \sin (A - \theta) + xy \sin C [\sin A \sin B + \sin (A - \theta) \sin (B - \theta)]$$
$$+ x^2 \sin A \sin C \sin (B - \theta) - y \sin B \sin (C + \theta) [p \sin (A - \theta) + q \sin A]$$
$$- x \sin A \sin (C + \theta) [p \sin B + q \sin (B - \theta)] = 0.$$

On obtient cette forme, en développant $\sin (B + \psi)$, et remplaçant φ et ψ

par leurs valeurs ; d'où l'on tire

$$m = \sin^2 C \sin^2 \theta \sin^2 (C + \theta),$$
$$k' = \sin B \sin C \sin^2 (C + \theta) \sin \theta [q \sin A - p \sin (A - \theta)],$$
$$k = \sin A \sin C \sin^2 (C + \theta) \sin \theta [p \sin B - q \sin (B - \theta)].$$

Donc : 1° le lieu est une hyperbole ; 2° les coordonnées du centre sont $\frac{k}{m}$, $\frac{k'}{m}$; 3° les asymptotes font avec l'axe des x des angles égaux à $\theta - B$ et à A, ainsi l'angle des asymptotes est $\theta + C$ ou $\theta + C - 2\pi$; 4° une construction géométrique donne les intersections des axes coordonnés avec la courbe ; et comme cette courbe passe par l'origine, on a donc trois points de la courbe et les directions des asymptotes, données suffisantes pour trouver géométriquement les axes principaux (*).

NOTE SUR LA THÉORIE DES FOYERS ;

PAR M. E. LAGUERRE-WERLY, DE BAR-LE-DUC,
Élève de l'institution Barbet.

---

1. Soit une conique ayant pour foyer le point $[\alpha, \beta]$, son équation sera de la forme

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = X^2,$$

X étant une fonction linéaire de x et de y, ou bien encore

$$\{(x - \alpha) + \sqrt{-1}(y - \beta)\}\{(x - \alpha) - \sqrt{-1}(y - \beta)\} = X^2.$$

Sous cette dernière forme, on voit que cette conique est tangente aux deux droites

$$(x - \alpha) + \sqrt{-1}(y - \beta) = 0,$$

et

$$(x - \alpha) - \sqrt{-1}(y - \beta) = 0.$$

Réciproquement, si une conique est tangente à ces deux droites, elle a pour foyer le point $[\alpha, \beta]$. Cette propriété analytique peut être employée pour trouver les coordon-

(*) M. Symon (Alexis), élève à Bruxelles, trouve le lieu pour l'angle S droit et discute le cas où le triangle ABC fait une demi-révolution autour de la base AB.

nées des quatre foyers d'une conique donnée par son équation.

Il suit de là que les coniques confocales doivent être regardées comme tangentes à deux mêmes droites, les coniques bi-confocales comme inscrites dans un même quadrilatère dont les quatre sommets sont les quatre foyers communs. Ces propriétés *projectives* des foyers nous permettront de généraliser leurs propriétés *métriques*.

2. Ainsi, de la théorie des coniques bi-confocales, nous pourrons tirer tous les théorèmes relatifs aux coniques inscrites dans un même quadrilatère.

Considérons, par exemple, trois coniques bi-confocales; par un point extérieur, menons-leur des tangentes : ces trois couples de tangentes auront une bissectrice commune; donc ils formeront un faisceau en involution. En généralisant, nous retrouverons le théorème de Desargues.

3. Deux coniques bi-confocales se coupent orthogonalement. L'homographie généralise ainsi ce théorème :

Si deux coniques inscrites dans un même quadrilatère se coupent, les deux tangentes menées au point d'intersection, et les droites obtenues en joignant ce point à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit, forment un faisceau harmonique.

4. La considération des foyers imaginaires peut être souvent utile; je ne citerai qu'un exemple.

Considérons une conique et deux tangentes à cette conique; joignons le point d'intersection des deux tangentes aux quatre foyers; les trois couples de droites ainsi obtenues auront une bissectrice commune, donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous trouverons ce théorème, cas particulier de celui de Desargues :

Si une conique est inscrite dans un quadrilatère, que

par un point extérieur on mène deux tangentes à cette conique, et puis, qu'on joigne ce point aux quatre sommets du quadrilatère, on obtiendra un faisceau en involution (*).

5. Je citerai encore quelques théorèmes, conséquences immédiates des principes précédents.

1°. Le lieu des centres des coniques tangentes à deux droites données et ayant un foyer fixe est une droite (**).

2°. Une conique inscrite dans un angle étant donnée, le problème suivant : « Construire une conique tangente à la première et aux deux côtés de l'angle en deux points donnés, » est, en général, susceptible de deux solutions. Les deux points de contact cherchés et le sommet de l'angle sont en ligne droite.

3°. Considérons trois coniques confocales, et, par un point pris dans le plan de ces coniques, menons six tangentes. Joignons les six points de contact au foyer commun, nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant une bissectrice commune ; donc elles formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* P, *et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes ; en joignant les six points de contact au point* P, *on aura un faisceau en involution.*

Note. M. Laguerre est parvenu à donner une plus grande généralité encore à ce beau théorème et toujours par la méthode analytique et projective combinée, si courte, si féconde. Nous donnerons ce travail prochainement.

(*) Le théorème sur le quadrilatère qu'on lit dans la *Géométrie supérieure*, p. 249, combiné avec celui-ci, donne lieu à un troisième théorème. TM.

(**) *Voir* t. II, p. 108 ; prenant le foyer pour origine, on a $n = 0$, $l = l'$; donc, etc.

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1844

(voir t. IV, p. 238 et 243);

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Intégrer les équations

$$2\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0$$

et

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On élimine d'abord y, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ entre ces deux équations et celles qu'on obtient en les différentiant une fois, ce qui conduit à l'équation linéaire du troisième ordre,

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 10\frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 26x = -\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$(1) \qquad x = \mathrm{T}e^{2t} + \mathrm{T}_1 e^{\alpha t} + \mathrm{T}_2 e^{\beta t},$$

α et β représentant, pour abréger, $4+\sqrt{3}$ et $4-\sqrt{3}$, qui sont avec 2 les racines de l'équation

$$X^3 - 10X^2 + 29X - 26 = 0,$$

et T, T_1, T_2 étant des fonctions de t déterminées par les équations

$$\mathrm{T} = -\int e^{-2t}.\varphi(t)\,dt, \qquad \mathrm{T}_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\int e^{-\alpha t}.\varphi(t)\,dt,$$

$$\mathrm{T}_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\int e^{-\beta t}.\varphi(t)\,dt,$$

dans lesquelles $\varphi(t)$ tient lieu de $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

L'équation (1) est une des intégrales demandées; pour avoir l'autre, on chasse de la première des équations données x et $\frac{dx}{dt}$, ce qui donne

$$2\frac{dy}{dt} - 9y = (\alpha - 2)T_1 e^{\alpha t} + (\beta - 2)T_2 e^{\beta t},$$

dont l'intégrale est

$$2y = e^{\frac{9t}{2}}\left[(\alpha - 2)\int T_1 e^{\left(\alpha - \frac{9}{2}\right)t}.dt + (\beta - 2)\int T_2 e^{\left(\beta - \frac{9}{2}\right)t} dt\right].$$

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer les lois des petites oscillations d'un fil flexible, inextensible, et sans masse, suspendu à un point fixe, et chargé de deux points matériels pesants, en supposant que ces deux points n'aient pas de vitesse à l'origine du mouvement, et qu'ils se trouvent alors avec le point de suspension sur une droite très-peu écartée de la verticale.

Chercher les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

I. Soient

- m, m' les masses des deux points matériels:
- l, l' les longueurs des deux parties du fil;
- θ_0 l'angle initial d'écart;
- M, M′ les positions des deux points à la fin du temps t compté depuis l'origine du mouvement;
- θ, θ' les angles que les deux parties du fil font alors avec la verticale (ces angles sont positifs du côté de θ_0, et négatifs du côté opposé).

D'après l'énoncé, les deux parties du fil resteront constamment tendues, soit quand elles seront sur le prolongement l'une de l'autre, soit quand elles formeront un angle, et les points matériels ne sortiront pas du plan de l'angle θ_0; donc m se mouvra toujours sur la circonférence de rayon l décrite du point de suspension comme centre, et, quand m sera en M, m' se mouvra pendant une durée infiniment petite sur la circonférence de rayon l' décrite de M comme centre.

On peut considérer m comme libre, pourvu qu'on lui applique à chaque instant deux forces dirigées suivant les deux parties du fil et égales à leurs tensions respectives. Or :

1°. La tension de l' est la somme $m'\left(g\cos\theta' + l'\frac{d\theta'^2}{dt^2}\right)$ de la composante du poids de m' suivant la direction de l', et de la force centrifuge due au mouvement de m' relatif à m, et la composante de cette tension suivant la tangente à l'arc décrit par m, s'obtient en la multipliant par $\sin(\theta - \theta')$; car l'angle que cette tangente fait avec la direction de l' est toujours représenté par $\frac{\pi}{2} + \theta' - \theta$.

2°. La composante de la tension de l suivant la même tangente est toujours nulle, et celle du poids de m est $mg\sin\theta$.

Donc, si l'on néglige les termes dont le degré surpasse deux en θ, θ', $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\theta'}{dt}$, qui sont continuellement des quantités très-petites, on a l'équation approchée

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\left[\frac{m'}{m}\theta' - \left(1 + \frac{m'}{m}\right)\theta\right].$$

Pour en former une seconde, il suffit de remarquer que le mouvement de m', relatif à m, est, à chaque instant, celui d'un pendule simple de longueur l', à point de sus-

pension fixe, dont le point matériel pesant et de masse m' serait sollicité par une force accélératrice variable, toujours égale et contraire à celle de m. La composante de cette force, suivant la tangente à l'arc décrit par m', est $m'l\frac{d^2\theta}{dt^2}.\cos(\theta-\theta')$, car cette tangente fait, avec la tangente correspondante à l'arc décrit par m, un angle représenté par $\pm(\theta-\theta')$; celle du poids de m' suivant la même direction est $m'g\sin\theta'$, et celle de la tension de l' est nulle. Donc, on a

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2}=-\frac{1}{l'}\left(g\theta'+l\frac{d^2\theta}{dt^2}\right),$$

au degré d'approximation qui a été indiqué, et, en remplaçant $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ par la valeur que donne l'équation (1), il vient

$$(2)\qquad \frac{d^2\theta'}{dt^2}=\frac{g}{l'}\left(1+\frac{m'}{m}\right)(\theta-\theta').$$

Afin d'intégrer simultanément les équations (1) et (2), on multiplie par un coefficient λ les deux membres de l'une d'elles, par exemple de la seconde, on ajoute ensuite membre à membre, puis, en posant

$$\theta+\lambda\theta'=u,$$

on chasse θ, ce qui donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dt^2}=g\left(1+\frac{m'}{m}\right)\\&\left\{\left(\frac{\lambda}{l'}-\frac{1}{l}\right)u-\frac{1}{l'}\left[\lambda^2+\left(1-\frac{l'}{l}\right)\lambda-\frac{m'l'}{l(m+m')}\right]\theta'\right\}.\end{aligned}\right.$$

Le coefficient de θ' dans cette équation est annulé par deux valeurs réelles de l'indéterminée λ, l'une positive et moindre que $\frac{l'}{l}$, l'autre négative, qui toutes deux ren-

dent négatif le coefficient de u; en désignant par $-\lambda_1$ et λ_2 ces valeurs de λ, par $-k_1^2$ et $-k_2^2$ celles du coefficient de u $\left[\text{y compris le facteur positif } g\left(1+\frac{m'}{m}\right)\right]$, et par u_1 et u_2 celles de la fonction u respectivement correspondantes, on a, au lieu des équations (1) et (2), les équations, de même forme l'une que l'autre,

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}+k_1^2u_1=0,\qquad \frac{d^2u_2}{dt^2}+k_2^2u_2=0,$$

dont les intégrales, prises de manière qu'on ait $\theta=\theta'=\theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}=0$ et $\frac{d\theta'}{dt}=0$, pour $t=0$, donnent les intégrales particulières des équations (1) et (2),

(4) $\theta-\lambda_1\theta'=\theta_0(1-\lambda_1)\cos k_1t,\quad \theta+\lambda_2\theta'=\theta_0(1+\lambda_2)\cos k_2t,$

qui satisfont aux conditions initiales.

Ces deux intégrales donnent, à chaque instant, au degré d'approximation indiqué, les valeurs de θ et de θ' qui déterminent la position de m et celle de m'. On en déduit facilement celles de $-l\frac{d\theta}{dt}$, $-l'\frac{d\theta'}{dt}$, et par suite les vitesses absolues de m et de m', dont les composantes horizontales et verticales sont, pour m, $-l\frac{d\theta}{dt}$, $-l\theta\frac{d\theta}{dt}$, et pour m', $-l\frac{d\theta}{dt}-l'\frac{d\theta'}{dt}$, $-l\theta\frac{d\theta}{dt}-l\theta'\frac{d\theta'}{dt}$. Enfin, le point de suspension étant pris pour pôle, et la verticale de ce point pour axe polaire, on obtiendrait l'équation polaire de la trajectoire de m' par l'élimination de t, θ et θ', entre les équations (4), et

$$l(2-\theta^2)+l'(2-\theta'^2)-\rho(2-\varphi^2)=0,$$
$$l(\theta'-\theta)-\rho(\theta'-\varphi)=0,$$

que l'on trouve facilement (φ et ρ sont les coordonnées de M').

II. Chacun des points m et m' oscillera comme un pendule simple, si les équations (4) donnent les mêmes valeurs de θ et de θ', pour des valeurs de t en progression par différence de raison quelconque α, et commençant à une valeur quelconque de t. Or, cela exige évidemment que l'on ait

$$(5) \quad \cos k_1 t = \cos k_1 (t + \alpha), \quad \text{et} \quad \cos k_2 t = \cos k_2 (t + \alpha)$$

pour toute valeur de t, et, par conséquent,

$$k_1 \alpha = 2 n_1 \pi, \quad \text{et} \quad k_2 \alpha = 2 n_2 \pi,$$

n_1 et n_2 étant deux nombres entiers positifs, qu'on peut supposer premiers entre eux. Quand il en est ainsi, le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ est commensurable; et, réciproquement, si

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

n_1 et n_2 étant deux nombres entiers, les équations (5) sont vérifiées par les valeurs

$$t = t', \quad t' + \alpha, \quad t' + 2\alpha, \text{ etc.}, \ldots,$$

quel que soit le temps t', en prenant $\alpha = \frac{2 n_1 \pi}{k_1} = \frac{2 n_2 \pi}{k_2}$.

Donc, il n'y a qu'une condition nécessaire et suffisante pour que chacun des points matériels oscille comme un pendule simple, savoir : *que le rapport des quantités k_1 et k_2 soit commensurable.*

On peut démontrer que si l'un des deux points oscille comme un pendule simple, il en sera de même de l'autre point.

Rectification à la solution du problème de Mécanique du concours d'agrégation, année 1851; par M. Dieu. (Tome XI, page 84.)

A la page 90, *au lieu des* lignes de 4 à 7 en descendant, *il faut :*

Dans ce cas, le point D atteint en descendant la position determinée

par cette valeur de y ; puis il remonte ensuite, et il faut considérer le signe — dans le second membre de l'équation (4).

Et à la même page, *au lieu des* quatre dernières lignes, *il faut* :

D, en remontant, finit par atteindre la position déterminée par la valeur $[\alpha]$ de y; puis il redescend, et l'on doit alors considérer le signe + dans le second membre de l'équation (4).

Dans ce cas, comme dans le précédent, le mouvement est oscillatoire, du moins après la première excursion.

THÉORÈMES SUR LES AIRES DES POLYGONES ET LES VOLUMES DES POLYÈDRES;

D'APRÈS M. STAUDT,
Professeur à Erlangen.

(Journal de M. Crelle, t. XXIV, p. 252; 1843.)

POLYGONE.

1. *Lemme.* Soit ABCD un quadrilatère plan; on a

$$2\,AB.CD\cos(AB, CD) = (AB)^2 + (BC)^2 - (AC)^2 - (BD)^2.$$

2. THÉORÈME. MAB, NO_1O_2 *étant deux triangles dans un même plan. Posant*

$$MA, NO_r \cos(MA, NO_r) = a_r; \quad MB.NO_r \cos(MB, NO_r) = b_r;$$

on aura

$$4\,MAB, NO_1O_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

3. THÉORÈME. MAB, NO_1O_2 *étant deux triangles situés dans des plans formant un angle* φ, *on aura*

$$4\,MAB, NO_1O_2 \cos\varphi = a_1 b_2 - a_2 b_1;$$

a et b ayant même signification que ci-dessus.

4. THÉORÈME. *Mêmes données. On a*

$$\begin{aligned}16\,MAB, NO_1O_2\cos\varphi = {} & [(MO_1)^2 + (AN)^2 - (AO_1)^2 - (MN)^2] \\ & .\,[(MO_2)^2 + (BN)^2 - (BO_2)^2 - (MN)^2] \\ & -[(MO_2)^2 + (AN)^2 - (AO_2)^2 - (MN)^2] \\ & [(MO_1)^2 + (BN)^2 - (BO_1)^2 - (MN)^2].\end{aligned}$$

Démonstration. Le membre à gauche, d'après le théorème 3, est égal à $2a_1 . 2b_2 — 2a_2 . 2b_1$, et, d'après le lemme, cette dernière expression est égale au second membre de l'équation. Donc, etc.

En effectuant la multiplication, on obtient neuf termes positifs et neuf termes négatifs, formés des carrés des neuf distances des trois sommets d'un triangle aux trois sommets de l'autre. Ces termes se forment ainsi : 1° chaque terme est le produit des carrés de deux de ces distances; 2° le même sommet n'entre pas dans les deux facteurs : 3° le signe du produit se détermine ainsi. Pour fixer les idées, prenons les côtés MA et NO_1, et supposons qu'on parcoure le premier triangle dans le sens MABM, et le second triangle dans le sens $NO_1\,O_2\,N$; le terme $(MN)^2\,(AO_1)^2$ est positif, et le terme $(MO_1)^2\,(AN)^2$ est négatif; dans le premier terme, on marche dans le même sens dans les deux triangles, savoir, de M vers A et de N vers O_1 ; pour le second terme, on marche en sens inverse de O_1 en N, et ainsi des autres.

5. Soient le triangle MAB et un polygone plan $O_1\,O_2\,O_3 \ldots O_n$, φ l'angle des deux plans, P l'aire du triangle, et Q l'aire du polygone. Décomposons le polygone en triangles, ayant pour sommet commun un point N pris dans l'intérieur du polygone; considérons les deux triangles consécutifs $NO_1\,O_2$, $NO_2\,O_3$; d'après le précédent théorème, le produit $16\,P . NO_1\,O_2 \cos\varphi$ est égal à une somme de dix-huit termes, dont neuf sont positifs et dont neuf sont négatifs; et, de même, pour le produit $16\,P . NO_2\,O_3 \cos\varphi$. Mais le terme $(MN)^2 . (AO_2)^2$ est positif pour le triangle $NO_2\,O_3$, et négatif pour le triangle $NO_1\,O_2$, car on marche dans le sens inverse; donc ces deux termes se détruisent. Il en est de même pour tous les termes où entre la lettre N. Il ne faut donc conserver que les termes provenant de la

comparaison des trois côtés du triangle avec les côtés successifs O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4,..., etc.; chaque comparaison donne deux termes. On a donc en tout $6n$ termes.

6. Théorème. *Soient un polygone plan de m sommets, a_1, a_2, a_3, ..., a_m, et un autre polygone plan de n sommets, b_1, b_2, ..., b_n; φ l'angle de deux plans, et* P *et* Q *les aires respectives.* $16\,PQ\cos\varphi$ *est égal à* $2mn$ *termes, mn avec le signe* $+$, *et mn avec le signe* $-$; *le côté* a_pa_{p+1} *comparé au côté* b_qb_{q+1} *donne ces deux termes* $(a_pb_q)^2.(a_{p+1}b_{q+1})^2 - (a_pb_{q+1})^2(a_{p+1}b_q)^2$.

Démonstration. Même raisonnement que dans le § 5.

7. Soit P l'aire d'un polygone plan de n sommets; appliquant le théorème précédent à deux polygones qui se confondent, on voit que $16\,P^2$ renferme :

1°. n termes de la forme $-(a_ra_{r+1})^4$;

2°. n termes de la forme $2(a_ra_{r+1})^2(a_{r+1}a_{r+2})^2$, renfermant deux côtés consécutifs;

3°. $n(n-3)$ termes renfermant les côtés non consécutifs a_ra_{r+1}, $a_\rho a_{\rho+1}$.

Les termes positifs sont de la forme $2(a_ra_\rho)^2(a_{r+1}a_{\rho+1})^2$, et les termes négatifs de la forme $-2(a_ra_{\rho+1})^2(a_{r+1}a_\rho)^2$.

Exemple. $n=3$; on a

$$16\,P^2 = -m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 + 2m_1m_2 + 2m_1m_3 + 2m_2m_3,$$

où m_1, m_2, m_3 sont les côtés du triangle. Si $n=4$, on a

$$16\,P^2 = -m_1^4 - m_2^4 - m_3^4 - m_4^4 + 2m_1^2m_2^2 + 2m_2^2m_3^2 + 2m_3^2m_4^2 + 2m_4^2m_1^2 - 2m_1^2m_3^2 - 2m_2^2m_4^2 + 2d^2e^2;$$

m sont les côtés, d et e les deux diagonales. On a aussi

$$16\,P^2 = (2de + m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2)(2de + m_2 + m_4^2 - m_1^2 - m_3^2).$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 69.)

Tétraèdres.

8. *Lemme.* MABC, $NO_1O_2O_3$ sont deux tétraèdres

quelconques; posons

$$MA.NO_r \cos(MA, NO_r) = a_r;$$
$$MB.NO_r \cos(MB, NO_r) = b_r;$$
$$MC.NO_r \cos(MC, NO_r) = c_r;$$

on a

$$(1)\left\{\begin{aligned}36\ MABC.NO_1O_2O_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 \\ + (a_3b_1 - a_1b_3)c.\end{aligned}\right.$$

Démonstration. Considérons MC comme représentant une force en grandeur et en direction; décomposons cette force en trois autres : MV_3, perpendiculaire au plan NO_1O_2; MV_1, perpendiculaire au plan NO_2O_3; et MV_2, perpendiculaire au plan NO_1O_3; nous aurons

$$MABC = MABV_1 + MABV_2 + MABV_3.$$

(On obtient cette équation en décomposant la résultante MC et chacune de ses trois composantes, en deux autres forces, l'une située dans le plan MAB, et l'autre perpendiculaire à ce plan). Soit φ l'angle des deux faces MAB et NO_1O_2, on a (2)

$$MAB.NO_1O_2 \cos\varphi = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{4}.$$

Nommons h_1, h_2 les perpendiculaires abaissées respectivement de V_3 sur MAB, et de O_3 sur NO_1O_2; nous avons

$$h_1h_2 = c_3 \cos\varphi.$$

En effet, construisons le parallélipipède des forces MV_1, MV_2, MV_3; on a h_1 égal à MV_3 multiplié par le sinus de l'inclinaison de MV_3 sur MAB; mais MV_3 est perpendiculaire sur NO_1O_2; donc $h_1 = MV_3 \cos\varphi$; $h_2 = NO_3 \times \sin$ de l'inclinaison de NO_3 sur NO_1O_2; désignons cette inclinaison par ψ; donc $h_1h_2 = MV_3.NO_3 \sin\psi\cos\varphi$; or ψ est égal à l'angle d'inclinaison de MV_3 sur la face du parallélipipède fondée par MV_1 et MV_2; donc $MV_3 \sin\psi$ est la perpendiculaire abaissée de C sur cette face: mais cette

perpendiculaire est parallèle à NO_3; donc

$$MV_3 \sin\psi = MC\cos(MC, NO_3);$$

donc

$$h_1 h_2 = c_3 \cos\varphi;$$

d'où

$$36\, NO_1 O_2 O_3 . MABV_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3;$$

on démontre de même

$$36\, NO_1 O_2 O_3 . MABV_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2,$$
$$36\, NO_1 O_2 O_3 . MABV_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1.$$

Ajoutant ces trois équations, on parvient à l'équation (1).

9. Dans un triangle sphérique, le produit du sinus d'une hauteur par le sinus de la base correspondante est constant; appelons ce produit le *sinus* de l'angle solide formé par les trois rayons qui aboutissent aux trois sommets du triangle; on a donc, d'après cette définition, le

volume de $MABC = \frac{1}{6} MA.MB.MC \sin \overline{M}ABC$, ou

$\sin \overline{M}ABC$ est le sinus de l'angle solide en M.

Faisant

$\cos(MA, NO_r) = \alpha_r$; $\cos(MB, NO_r) = \beta_r$; $\cos(MC, NO_r) = \gamma_r$,

l'équation (1) donne

$$\sin \overline{M}ABC \sin \overline{N}O_1 O_2 O_3 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\gamma_3 + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)\gamma_1 + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3)\gamma_2.$$

On en déduit aussi ce théorème : *La distance du centre de gravité d'un tétraèdre à un des sommets divisé par le sinus de l'angle solide formé par les trois autres distances, donne un quotient constant.*

On sait que les quatre distances dont il s'agit, étant considérées comme quatre forces données en grandeur et en direction, le système est en équilibre, les forces agissant du centre de gravité vers les sommets. On a donc ici un beau théorème de statique.

10. En multipliant les deux membres de l'équation (1) par 8, et remplaçant $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$, etc., par leurs valeurs (*lemme*), on trouve, pour les termes se rapportant aux faces ABC et $O_1O_2O_3$, les six termes suivants :

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &(AO_1)^2(BO_3)^2(CO_2)^2+(AO_2)^2(BO_1)^2(CO_3)^2\\ &+(AO_3)^2(BO_2)^2(CO_1)^2-(AO_1)^2(BO_2)^2(CO_3)^2\\ &+(AO_2)^2(BO_3)^2(CO_1)^2-(AO_3)^2(BO_1)^2(CO_2)^2. \end{aligned}\right.$$

La comparaison de toutes les faces, deux à deux, donne cinquante-quatre termes analogues, dont vingt-sept positifs et autant de négatifs.

11. Si l'on représente par a, b, c les arêtes qui partent d'un sommet d'un tétraèdre, par a', b', c' les côtés opposés, et par P le volume du tétraèdre, on a, les deux tétraèdres du lemme 8 se réunissant,

$$\begin{aligned} 144\,P^2 = {}& a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2)\\ &+b^2b'^2(a^2+a'^2+c^2+c'^2-b^2-b'^2)\\ &+c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2)\\ &-a'^2b'^2c'^2-a^2b^2c'^2-a^2b'^2c^2-a'^2b^2c^2. \end{aligned}$$

12. Soient P le volume d'un polyèdre formé par m triangles, Q le volume d'un polyèdre formé par n triangles, le produit 288 PQ sera égal à la somme de mn expressions de six termes chacune et de la forme indiquée 10 (A); $3mn$ termes positifs et $3mn$ négatifs; c'est une conséquence du théorème 8.

13. Théorème général. *Le produit des volumes de deux polyèdres est une fonction algébrique entière des carrés des distances des sommets d'un polyèdre aux sommets de l'autre polyèdre.*

Ce théorème se démontre facilement à l'aide du théorème précédent, par un raisonnement analogue à celui qui établit le théorème 6.

GRAND CONCOURS DE 1852

(voir t. X, p. 318).

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES.

Étant donnés : 1° les distances $FM = R$, $FM' = R'$, $FM'' = R''$ de trois points M, M', M'' d'une section conique au foyer F de cette courbe; 2° les angles MFA, $M'FA$, $M''FA$ qui déterminent les positions des rayons vecteurs FM, FM', FM'', relativement à une droite fixe FA menée par le foyer dans le plan de la courbe;

On demande : 1° De déterminer complétement la courbe, sa nature, sa situation et ses dimensions; 2° d'appliquer la solution aux données suivantes :

$$
\begin{aligned}
R &= 0,30090811, & MFA &= 16^\circ 58' 32'',3,\\
R' &= 0,4094501, & M'FA &= 117^\circ 22' 40'',5,\\
R'' &= 0,4373418, & M''FA &= 222^\circ 12' 35''.
\end{aligned}
$$

Observation. Cette question d'astronomie a quatre solutions géométriques; et c'est de géométrie qu'il s'agit; l'énoncé peut induire en erreur. La question est résolue dans une foule d'ouvrages, entre autres, par Comte et Cirodde; ouvrages répandus. Pourquoi les professeurs préposés aux examens, tuteurs des élèves, n'ont-ils pas réclamé? c'était leur devoir.

Il est des hommes que le ciel a doués d'une faculté extraordinaire pour les opérations numériques, et qui, manipulant avec un art infini les formules logarithmiques, croient que cette manipulation constitue le *génie*, le *sublime* de la science; croyance innocente, excusable lorsqu'elle reste personnelle, mais ne devrait pas s'imposer ailleurs. *Sat sapienti.*

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Première question.

Étant données deux droites AA, BB qui se coupent en O, et un point C situé sur la bissectrice de l'un des angles qu'elles forment; on mène par ce point C une sécante quelconque, et des points D et F, où elles rencontrent les droites données, on abaisse sur la bissectrice des perpendiculaires DF, EG; puis ayant déterminé le milieu H de CO, on décrit une circonférence sur GH comme diamètre : on demande le lieu des intersections de cette circonférence avec la perpendiculaire DF.

Observation. Question d'une facilité rudimentaire: comparativement parlant, c'est la meilleure des trois. Elle se rapporte à la géométrie segmentaire qu'on repousse de l'enseignement. Quelle inconséquence!

Deuxième question.

Par un point quelconque pris dans l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on élève une perpendiculaire sur cette base; cette perpendiculaire rencontre toutes les faces latérales de la pyramide, prolongées au besoin. On demande de démontrer que la somme des distances des points de rencontre au plan de la base est une quantité constante.

Observation. Bonne question d'école industrielle, mais d'un énoncé tronqué. *Faces!* lisez plans des faces.

En comparant la matière de ce concours à celle des concours de la première Université impériale, lorsque Monge ne dédaignait pas de fournir des solutions, on doit s'écrier avec le poëte :

Comment en un plomb vil l'or pur s'est-il changé?

Avis. Nous n'insérerons aucune réponse; nous donnerons la solution couronnée du prix d'élémentaire de 1851. que l'abondance des matières nous a forcé d'ajourner.

SUR DES DÉTERMINANTS DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

On nomme *déterminant* des n quantités :

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,\ \omega_1, \\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots,\ \omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ldots,\ \omega_n, \end{array}$$

le dénominateur commun qui résulte de la résolution des n équations de premier degré à n inconnues :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \ldots + \omega_1 x_n = A_1, \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \omega_2 x_n = A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \ldots + \omega_n x_n = A_n; \end{array}$$

et on représente cette expression par la notation symbolique :

$$\text{Dét.}\left\{\begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots,\ \omega_1 \\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots,\ \omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ldots,\ \omega_n \end{array}\right\}.$$

Nous appellerons ce dénominateur, suivant M. Jacobi, *déterminant du $n^{\text{ième}}$ degré*; et par conséquent,

$$\text{Dét.}\left\{\begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1 \\ \alpha_2,\ \beta_2 \end{array}\right\} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

sera un déterminant du second degré.

On sait et on démontre aisément qu'un déterminant d'un degré quelconque peut être représenté par une

somme algébrique des produits de plusieurs déterminants de degrés inférieurs; mais on n'a pas aperçu, que je sache, comment la loi suivante de dérivation peut être utile dans la recherche des déterminants des expressions à formes quadratiques.

Si l'on pose

$$\text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \alpha_2, & \beta_2\end{matrix}\right\}=d_1,\quad \text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \gamma_2\end{matrix}\right\}=d_2,$$

$$\text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \alpha_3, & \beta_3\end{matrix}\right\}=d_3,\quad \text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \gamma_1\\ \alpha_3, & \gamma_3\end{matrix}\right\}=d_4,$$

et

$$\text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3\end{matrix}\right\}=D_1,$$

on aura

$$D_1 = d_1 d_4 - d_2 d_3.$$

De même, si l'on pose

$$\text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & \lambda_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \lambda_2\\ \alpha_3, & \beta_3, & \lambda_3\end{matrix}\right\}=D_2,\quad \text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\\ \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4\end{matrix}\right\}=D_3,$$

$$\text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & \lambda_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \lambda_2\\ \alpha_4, & \beta_4, & \lambda_4\end{matrix}\right\}=D_4,$$

on aura

$$\Delta = D_1 D_4 - D_2 D_3,$$

étant

$$\Delta = \text{Dét.}\left\{\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \lambda_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \lambda_2\\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \lambda_3\\ \alpha^4, & \beta_4, & \gamma_4, & \lambda_4\end{matrix}\right\}, \ (*)$$

et ainsi de suite.

(*) *Voir* Binet, *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XVI, p. 280; année 1813.

Une expression de la forme

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$

est généralement nommée forme *quadratique binaire* ou à deux indéterminées. On appellera forme quadratique à n indéterminées la suivante :

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + \ldots \\ + 2 b_{n-1} x_1 x_n + 2 c_1 x_2 x_3 + \ldots + 2 k_1 x_{n-1} x_n. \end{aligned}$$

Représentant cette fonction par u, le déterminant de cette forme quadratique à n indéterminées sera

$$\text{Dét.} \begin{Bmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, \ldots, & u_{1n} \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, \ldots, & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1}, & u_{n2}, & u_{n3}, \ldots, & u_{nn} \end{Bmatrix},$$

$u_{r,s}$ étant la dérivée seconde de la fonction u par rapport aux variables x_r, x_s (*). Cela posé, si l'on applique la loi ci-dessus à la formation des déterminants des formes quadratiques à deux, trois indéterminées, on aura

(1) $$D_1 = d_1 d_4 - d_2^2, \quad \Delta = D_1 D_4 - D_2^2 \ldots,$$

en observant que

$$d_1 = \text{Dét.} \begin{Bmatrix} u_{11}, & u_{12} \\ u_{21}, & u_{22} \end{Bmatrix}, \quad d_2 = \text{Dét.} \begin{Bmatrix} u_{11}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{23} \end{Bmatrix},$$

$$d_3 = \text{Dét.} \begin{Bmatrix} u_{11}, & u_{12} \\ u_{31}, & u_{32} \end{Bmatrix}, \quad d_4 = \text{Dét.} \begin{Bmatrix} u_{11}, & u_{13} \\ u_{31}, & u_{33} \end{Bmatrix},$$

et par conséquent $d_2 = d_3$; et ainsi de suite.

On sait que si le déterminant $a_1 a_2 - b_1^2$ de la forme quadratique à deux indéterminées

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome X, page 124. C'est le déterminant *hessien* des Anglais. TM.

est égal à zéro, on a

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2 = \frac{1}{a_1} (a_1 x_1 + b_1 x_2)^2.$$

Considérons la forme quadratique à trois indéterminées,

(2) $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_2 x_1 x_3 + 2 c_1 x_2 x_3,$

on prouvera bien facilement que si le déterminant de cette expression est nul et en outre les déterminants des deux formes quadratiques suivantes :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$
$$a_1 x_1^2 + a_3 x_2^2 + 2 b_2 x_1 x_3;$$

l'expression considérée sera égale à

(3) $$\frac{1}{a_1} (a_1 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3)^2.$$

Si l'on considère, en troisième lieu, une forme quadratique à quatre indéterminées, on pourra la réduire à

$$\frac{1}{a_1} (a_1 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4)^2;$$

en supposant : 1° nul le déterminant de cette forme; 2° nuls les déterminants des formes quadratiques suivantes à deux indéterminées :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_2 x_1 x_3 + 2 c_1 x_2 x_3,$$
$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_4 x_4^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + 2 b_3 x_1 x_4 + 2 c_2 x_2 x_4;$$

3° nuls les trois déterminants des formes quadratiques binaires :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2 b_1 x_1 x_2,$$
$$a_1 x_1^2 + a_3 x_3^2 + 2 b_2 x_1 x_3,$$
$$a_1 x_1^2 + a_4 x_4^2 + 2 b_3 x_1 x_4.$$

La loi s'étend aux formes quadratiques à n indéterminées.

On doit remarquer que, les relations (1) subsistant, si l'on a $D_1 = 0$ et $d_1 = d_4 = 0$, l'on aura aussi $d_2 = 0$; par conséquent, la forme quadratique à trois indéterminées (2) pourra se réduire à l'expression (3) si l'on a

$$d_1 = d_2 = d_4 = 0.$$

De même pour les autres formes.

Ces propriétés des déterminants des formes quadratiques seront très-utiles dans la recherche des équations différentielles qui donnent les caractères du maximum et du minimum dans le calcul des variations, équations que l'on sait intégrer d'après la belle méthode de M. Jacobi.

MÉLANGES.

1. Supposons une infinité d'hyperboles ayant un sommet réel et un sommet imaginaire en commun; les lieux des centres et des autres sommets sont des circonférences; le lieu des foyers est un limaçon de Pascal; l'enveloppe des asymptotes se compose de deux points fixes, dont l'un est à l'infini; c'est le sujet d'un écrit portant pour suscription : *Linvaner de Vipal* (*).

2. M. Aron Frank, élève de l'institution Coutant, énonce ce théorème :

Soit une ellipse fixe, et dans le même plan une ellipse variable; cette dernière ligne est assujettie aux conditions suivantes: 1° elle passe par un point fixe; 2° elle a tous ses systèmes de diamètres conjugués parallèles à ceux de l'ellipse fixe; 3° en menant par le point fixe une sécante, le pôle de cette droite doit être le même par rapport à l'ellipse fixe et à l'ellipse variable : le lieu des centres de cette dernière ellipse est une conique.

(*) Question proposée au lycée Saint-Louis.

Le même élève démontre cette proposition :

Par un point quelconque de la directrice d'une conique, on mène une tangente au cercle décrit du foyer correspondant comme centre, et avec un rayon égal au rayon vecteur correspondant ; l'enveloppe de ces tangentes est un cercle ayant le foyer pour centre et le demi-paramètre principal pour rayon (*).

3. M. Regray-Belmy, élève de M. Prouhet, démontre cette proposition :

Un système de coniques semblables et semblablement placées (homothétiques), étant rencontrées par une droite parallèle à un axe principal, les normales menées respectivement par les points d'intersection se rencontrent en un même point situé sur le second axe principal. Ce point est le foyer de la conique homothétique qui a la sécante pour directrice. C'est un cas particulier de ce théorème général :

Soit $a^m P_m + a^{m-1} P_{m-1} + \ldots a P_1 + P_0 = 0$ l'équation d'une surface algébrique de degré m ; P_r est l'ensemble de termes de degré r ; en donnant au multiplicateur variable a toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, on obtient le système d'une infinité de surfaces homothétiques. Toute fonction des coefficients où a n'entre pas a la même valeur pour toutes les surfaces ; toute fonction des coefficients et de la seule variable z, et où a n'entre pas, a la même valeur pour tous les points d'intersection du système par un plan parallèle au plan des yz ; toute fonction des coefficients et des deux variables x, y, et indépendante de a, reste la même pour tous les points où une parallèle à l'axe des z rencontre le système.

(*) Cet élève, d'une excellente moralité, n'a pas été *admis* à concourir pour l'admission à l'École Normale ; *voir* son *prénom*, ainsi que d'autres de la même catégorie. *O navis !...*

4. Théorème de Lambert. Si la fonction $f(x)$ a un diviseur rationnel de la forme $a+bx^2+cx^4+dx^6+\ldots$, on trouvera ce diviseur en cherchant le plus grand commun diviseur à deux polynômes, dont l'un renferme tous les termes de degré pair de $f(x)$, l'autre tous les termes de degré impair; théorème analogue pour le cas où le diviseur rationnel serait de la forme $a+bx^3-cx^6+dx^9$. (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1763.)

5. Théorème de Leibnitz. Dans tout système de numération, si l'on écrit au-dessous les unes des autres les puissances semblables des nombres 1, 2, 3, 4, ..., les mêmes chiffres se reproduisent périodiquement dans chaque colonne. (*Correspondance avec Hermann*, *année* 1757.)

QUESTIONS.

255. Trois cercles a, b, c sont situés dans un même plan.

1°. Si par un même point passent trois tangentes intérieures communes aux cercles a, b; b, c; c, a, les trois autres tangentes intérieures communes passent aussi par un même point.

2°. Si par un même point passent une tangente intérieure commune aux cercles a, b; une tangente extérieure commune aux cercles b, c; une tangente extérieure commune aux cercles c, a; les deux autres tangentes extérieures communes aux cercles b, c; c, a, et la seconde tangente intérieure commune aux cercles a, b, passent aussi par un même point.

3°. Si par le même point passent une tangente extérieure commune aux cercles a, b; une tangente extérieure commune aux cercles b, c; une tangente intérieure com-

mune aux cercles c, a; et si les deux autres tangentes extérieures communes aux cercles a, b; b, c ne forment qu'une seule droite m, alors la seconde tangente intérieure commune aux cercles a, c passe par le point où cette droite m touche le cercle b. (QUIDDE.)

256. Soit un quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle; on décrit un second cercle touchant le côté AB en B et le côté CD, puis un troisième cercle touchant le côté AD en D et le côté BC; la droite qui va du point A au centre du second cercle fait, avec le côté AB, un angle égal à l'angle que fait la droite qui va de A au centre du troisième cercle avec le côté AD (*). (QUIDDE.)

SOLUTION DE LA QUESTION 228

(voir t. IX, p. 298);

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,
De la maison ecclésiastique de Vals.

Les trois sommets A, B, C d'un triangle et les trois sommets A′, B′, C′ d'un tétraèdre sont donnés; par un point quelconque M dans le plan du triangle ABC, on mène les droites MA, MB, MC; on prend dans l'espace un point S tel que, dans le tétraèdre SA′B′C′, on ait

$$SA' = MA;\quad SB' = MB;\quad SC' = MC;$$

le lieu du point S est une surface du second degré.

(JACOBI.)

Solution. Posons

$$BC = a,\quad AC = b,\quad AB = c,\quad MA = f,$$
$$MB = g,\quad MC = h,\quad A'B' = m,\quad A'C' = n,$$
$$\text{angle } B'A'C' = \alpha,$$

et le point A′ étant pris pour origine de trois axes rectangulaires, tels que A′B′C′ soit le plan des xy, et A′B′ l'axe

(*) La démonstration donnée page 278 est illusoire. On y reviendra.

des y; désignons par x, y, z les coordonnées du point S.

Entre les six droites AB, AC, BC, MA, MB, MC qui joignent deux à deux les quatre points A, B, C, M, situés dans un même plan, Carnot (*Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*) a donné (page 7) une relation qui peut se mettre facilement sous la forme suivante :

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \quad (f^2-h^2)[a^2(f^2-g^2)+b^2(g^2-h^2)] \\ -c^2(f^2-g^2)(g^2-h^2)-a^2(b^2+c^2-a^2)f^2 \\ -b^2(a^2+c^2-b^2)h^2-c^2(a^2+b^2-c^2)g^2+a^2b^2c^2=0. \end{array}\right.$$

Or, comme on a

$$\overline{SA'}^2 = f^2 = x^2+y^2+z^2,$$

$$\overline{SB'}^2 = g^2 = x^2+(y-m)^2+z^2,$$

$$\overline{SC'}^2 = h^2 = (x-n\sin\alpha)^2+(y-n\cos\alpha)^2+z^2,$$

il s'ensuit que les différences f^2-g^2, f^2-h^2, g^2-h^2 sont des fonctions du premier degré en x et y; et par conséquent, la relation (1) donne une équation du second degré relativement à x, y, z; donc, etc.

1re *remarque*. Si l'on pose

$$\begin{aligned} A = {} & 4mn\cos\alpha(a^2-b^2-c^2)+4n^2b^2\cos^2\alpha+4m^2c^2+a^4+b^4 \\ & +c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2), \end{aligned}$$

$$B = 4n^2b^2\sin^2\alpha+a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

$$C = a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

$$D = 4mn\sin\alpha(a^2-b^2-c^2)+4n^2b^2\sin 2\alpha,$$

$$\begin{aligned} E = {} & -2m^2n\cos\alpha(a^2-b^2-c^2)+2nb^2\cos\alpha(a^2-b^2+c^2) \\ & -4n^3b^2\cos\alpha-2mn^2(a^2-b^2-c^2)+2mc^2(a^2+b^2-c^2) \\ & -4m^3c^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = {} & -2m^2n\sin\alpha(a^2-b^2-c^2)+2nb^2\sin\alpha(a^2-b^2+c^2) \\ & -4n^3b^2\sin\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = {} & m^2n^2(a^2-b^2-c^2)-m^2c^2(a^2+b^2-c^2-m^2) \\ & -n^2b^2(a^2-b^2+c^2-n^2)+a^2b^2c^2, \end{aligned}$$

la surface du second degré, lieu du point S, est exprimée par l'équation

$$Ay^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dxy + Ey + Fx + G = 0.$$

2e *remarque*. Si les deux triangles ABC, A'B'C' sont rectangles en A et A', c'est-à-dire si l'on a

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \alpha = 90^\circ,$$

l'équation (1) devient

$$\begin{aligned}4c^2(m^2 - b^2)y^2 + 4b^2(n^2 - c^2)x^2 - 4b^2c^2z^2 + 4mc^2(b^2 - m^2)y \\ + 4nb^2(c^2 - n^2)x + m^2c^2(m^2 - b^2) \\ + n^2b^2(n^2 - c^2) + b^2c^2(a^2 - m^2 - n^2) = 0,\end{aligned}$$

et elle représente une surface du second degré, ayant pour centre le point milieu de l'hypoténuse B'C'. Si l'on rapporte alors la surface à son centre et à ses axes, son équation devient

$$\begin{aligned}4c^2(m^2 - b^2)y^2 + 4b^2(n^2 - c^2)x^2 - 4b^2c^2z^2 \\ + b^2c^2(a^2 - m^2 - n^2) = 0,\end{aligned}$$

équation facile à discuter.

Note. MM. Vachette et Lamarle ont traité la question à peu près de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 148

(voir t. VI, p. 216);

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

La rectification de la courbe, lieu géométrique d'un point tel que si, de ce point, on mène deux tangentes à une ellipse, l'angle qu'elles font entre elles soit constant, dépend des fonctions elliptiques. (STREBOR.)

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes $2a$, $2b$, soit

m la tangente de l'angle constant ; l'équation du lieu géométrique est

$$[x^2+y^2-(a^2+b^2)]m = 2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2},$$

ou en coordonnées polaires,

$$\rho^4 - 2\rho^2\left(c^2+\frac{4e^2\sin^2\omega+4b^2}{m^2}\right)+c^4-\frac{4a^2b^2}{m^2}=0,$$

en posant

$$a^2+b^2=c^2,\quad a^2-b^2=e^2.$$

Cette équation est de la forme

$$\rho^4-2\rho^2f(\omega)+k^4=0.$$ (*Voir* tome IX, page 142.)

Soit ds l'élément de la courbe, on aura

$$ds=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}\,d\omega.$$

Si l'on différentie l'équation donnée, on trouve

$$2\rho^2d\rho - 2f(\omega)\,d\rho - \rho f'(\omega)\,d\omega = 0,$$

$f'(\omega)$ étant la dérivée de $f(\omega)$. On tire de là

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2=\frac{\rho^2[f'(\omega)]^2}{4\{\rho^4+[f(\omega)]^2-2\rho^2f(\omega)\}};$$

mais, d'après l'équation,

$$\rho^4-2\rho^2f(\omega)=-k^4;$$

donc

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2=\frac{\rho^2[f'(\omega)]^2}{4\{[f(\omega)]^2-k^4\}},$$

et

$$\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2=\frac{\rho^2\{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4k^4\}}{4\{[f(\omega)]^2-k^4\}},$$

puis

$$ds=\frac{\rho\,d\omega}{2}\sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4k^4}{[f(\omega)+k^2][f(\omega)-k^2]}}.$$

D'un autre côté, l'équation de la courbe donne

$$\rho = \sqrt{f(\omega) \pm \sqrt{[f(\omega)]^2 - k^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{f(\omega) + k^2} \pm \sqrt{f(\omega) - k^2}\right),$$

en faisant disparaître les radicaux superposés.

Il vient finalement

$$ds = \frac{d\omega}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{f(\omega) + k^2} \pm \sqrt{f(\omega) - k^2}\right)\sqrt{\frac{4[f(\omega)^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4}{[f(\omega) + k^2][f(\omega) - k^2]}}.$$

Si donc s et s' représentent les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle ω, on trouvera

$$s + s' = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{4(f\omega)^2 + (f'\omega)^2 - 4k^4}{f(\omega) - k^2}}\, d\omega,$$

$$s - s' = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{4(f\omega)^2 + (f'\omega)^2 - 4k^4}{f(\omega) + k^2}},$$

ainsi que l'annonce M. W. Roberts à l'endroit cité.

Dans le cas qui nous occupe, $f(\omega)$ est de la forme

$$A + B\sin^2\omega;$$

de sorte que $f'(\omega) = 2B\sin\omega\cos\omega$. On verra alors que le numérateur commun aux expressions de $s + s'$ et $s - s'$ sera de la forme

$$D + C\sin^2\omega,$$

la quatrième puissance du sinus disparaissant. Quant au dénominateur, il sera évidemment de la forme

$$E + B\sin^2\omega.$$

Or, l'on sait qu'une intégrale de la forme

$$z = \int\frac{\sqrt{D + C\sin^2\omega}}{\sqrt{E + B\sin^2\omega}}\, d\omega$$

dépend des fonctions elliptiques.

La seconde partie du théorème de M. W. Roberts, qui

est relative aux courbes sphériques, se démontre d'une manière analogue à celle que nous venons de donner ici; il suffit de se rappeler que dans ce système on a

$$ds = \sqrt{\sin^2 \rho + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}\, d\omega \ (*).$$

SOLUTION DE LA QUESTION 182

(voir t. VII, p. 187);

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

Soit E_1 la longueur du quadrant d'une ellipse dont l'excentricité est e, le demi-grand axe étant 1. On aura

$$\int_0^{\alpha} \frac{E_1\, e\, de}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2 - e^2}} = \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad \text{(W. ROBERTS.)}$$

On sait, d'après Legendre, que l'on a entre les fonctions complètes E_1, F_1, la relation

$$E_1 = b^2\left(F_1 + e\frac{dF_1}{de}\right),$$

où b^2 est le complément de e^2; donc

$$\frac{E_1}{1-e^2} = F_1 + e\frac{dF_1}{de}.$$

Le développement de la fonction F_1, ordonné suivant les puissances ascendantes du module, est, comme on sait,

$$F_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}e^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}e^4 + \frac{1^2 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 6^2}e^6 + \ldots\right).$$

(*) Ainsi les théorèmes 4 et 5 de M. Strebor (tome IX, page 142) sont démontrés. TM.

On aura donc

$$e\frac{dF_1}{de}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1^2}{2^2}.2e^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}4e^4+\frac{1^2\,3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.6e^6+\ldots\right),$$

donc, en ajoutant, j'aurai

$$\frac{E_1}{1-e^2}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}3e^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}5e^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.7e^6+\ldots\right):$$

donc

$$\int_0^\alpha\frac{E_1\,ede}{(1-e^2\sqrt{\alpha^2-e^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^\alpha\frac{ede}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}+\frac{1^2.3}{2^2}\int_0^\alpha\frac{e^3\,de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}+\frac{1^2.3^2 5}{4^2.4^2}\int_0^\alpha\frac{e^5\,de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}\right).$$

Le terme général de ce développement est de la forme

$$\frac{1^2\,3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2\ldots\qquad(2n)^2}\int_0^\alpha\frac{e^{2n+1}\,de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}.$$

Or (*voir* LACROIX, *Calcul différentiel et intégral*, n° 1165) on a

$$\int_0^\alpha\frac{e^{2n+1}\,de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}=\frac{2.4.6\ldots\quad 2n}{3\;5.7\ldots 2n+1}\alpha^{2n+1}.$$

Donc notre terme général se réduit à

$$\frac{1.3.5\ldots 2n+1}{2.4.6\ldots\quad 2r}\alpha^{2n+1};$$

par suite,

$$\int_0^\alpha\frac{E_1\,ede}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}}=\frac{\pi\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4.}\alpha^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^6+\ldots\right).$$

La quantité entre parenthèse n'est autre chose que

$$(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce qui prouve la relation indiquée.

THÉORÈMES SUR LES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ;

D'APRÈS M. GEORGE SALMON, A DUBLIN.

(Journal de M. Crelle, t. XLII, p. 274; 1851; en français.)

1. *Lemme.* Si par un point quelconque d'une conique, on mène quatre droites à quatre points fixes situés sur la conique, le rapport anharmonique du faisceau est constant. (CHASLES.)

2. *Lemme.* Si par un point O situé dans le plan d'une courbe du troisième degré, on mène les six tangentes, les six points de contact sont sur une conique. (PONCELET.)

Corollaire. Si le point O est situé sur la courbe, les quatre points de contact et le point O sont sur une conique qui touche la courbe de troisième degré au point O.

3. THÉORÈME. *Le rapport anharmonique des quatre tangentes menées par un point quelconque* O *situé sur une courbe du troisième degré est constant.*

Démonstration. Soit le point O′ consécutif au point O: les quatre points de contact des tangentes menées par O′ sont les mêmes que ceux des tangentes menées par O; les six points O, O′ et les quatre points de contact sont sur la même conique (*corollaire*); donc le rapport anharmonique est le même pour le point O′ que pour le point O (*lemme* 1); donc, etc.

4. *Lemme.* Soient deux faisceaux chacun de quatre rayons *semblables;* les deux sommets et les quatre points d'intersection des rayons homologues sont sur une même conique.

Observation. Les faisceaux semblables sont ceux dont les rapports harmoniques sont égaux.

5. Théorème. P *et* Q *étant deux points d'une courbe du troisième degré, les quatre tangentes qui passent par* P *coupent en seize points les quatre tangentes qui passent par* Q; *il existe quatre coniques qui passent par quatre des seize points et par les deux points* P *et* Q.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 3 et du lemme 4.

THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ, A CENTRE;

D'après M. le professeur GRAVES, a Dublin.

(Journal de M. Crelle, t. XLII, p. 279; 1851; en anglais.)

---

1. *Lemme.* ACB est le chemin le plus court pour aller du point A au point B, en passant par le point C situé sur une droite, dans l'espace, lorsque AC et BC sont également inclinés sur cette droite.

2. *Lemme.* Deux tangentes menées, par le même point, à une surface du second degré *à centre,* sont proportionnelles aux demi-diamètres parallèles à ces tangentes.

3. *Lemme.* P et Q étant les points de contact de deux plans tangents à une surface du second degré à centre, la perpendiculaire abaissée de P sur le plan Q est à la perpendiculaire abaissée du centre sur le même plan Q, comme la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan P est à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan P.

Démonstration. La proposition est évidente pour la sphère. Par la méthode *métamorphique,* on étend la proposition à une surface quelconque du second degré.

4. *Lemme.* P et Q étant les points de contact de deux plans tangents à une surface du second degré; L la droite

d'intersection de ces deux plans; S un point de cette droite tel, que PS et QS soient également inclinés sur L; les droites PS et QS sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents en P et en Q.

Démonstration. Les droites PS et QS sont évidemment proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de P et de Q sur la droite L, et par conséquent aux perpendiculaires abaissées de P et de Q sur les plans tangents en Q et en P; donc (*lemme* 3) les droites PS et QS sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les plans Q et P.

5. *Corollaire.* Les droites PS et QS sont des tangentes à la surface; donc (*lemme* 2), les demi-diamètres parallèles à PS et à QS sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées de P et Q sur les plans P et Q; autrement, la perpendiculaire abaissée de P sur le plan Q, multipliée par le demi-diamètre parallèle à PS, est égale à la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan P, multipliée par le demi-diamètre parallèle à QS.

Observation. Le chemin PSQ est le plus court pour aller de P à Q en touchant la droite L (*lemme* 1).

6. Théorème de Joachimsthal. *Soit un point* P *situé sur une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré à centre; menons en* P *la tangente à la courbe et le plan tangent à la surface; la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, multipliée par le demi-diamètre parallèle à la tangente, donne un produit constant.*

Démonstration. Soient P, S, Q trois points consécutifs sur la ligne géodésique. Ayant égard au corollaire et à l'observation qui précèdent, le théorème devient évident. (Voir *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 22; 1846.)

THÉORÈME SUR L'ÉQUATION CUBIQUE;

PAR M. PROUHET,
Professeur.

THÉORÈME. *Si l'équation du troisième degré a une racine de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, les quantités contenues sous le radical dans les formules ordinaires, deviennent des cubes parfaits* (*).

Cette proposition se trouve implicitement énoncée dans l'*Algèbre* d'Euler (art. 749); elle doit avoir été démontrée quelque part, car les analystes qui se sont exprimés sur le cas irréductible ont dû, avant tout, chercher à ramener les radicaux cubiques à la forme $a+b\sqrt{-1}$; et, voyant que cela ne pouvait se faire en général, chercher dans quel cas cette réduction est possible. Voici, au reste, comment je démontre ce théorème:

Soit

$$x^3+px+q=0;$$

les racines sont données par la formule

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}.$$

Si l'on désigne par α, β, γ les trois racines, et si l'on observe que $-(4p^3+27q^2)$ est le dernier terme de l'équation au carré des différences, savoir:

$$+(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2,$$

on aura

$$x=\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}+\ldots$$

(*) Tome X, page 349, on lit *carrés*. C'est une faute qui n'est pas indiquée dans l'*errata*.

Si maintenant on suppose

$$\alpha = a + \sqrt{b},$$

les deux autres racines seront nécessairement

$$\beta = a - \sqrt{b}, \quad \gamma = -2a,$$

et, par suite, la formule de résolution devient

$$x = \sqrt[3]{-a(a^2 - b) + \left(3a^2 - \frac{b}{3}\right)\sqrt{-\frac{b}{3}}} + \ldots,$$

et il est facile de vérifier que

$$-a(a^2 - b) + \left(3a^2 - \frac{b}{3}\right)\sqrt{-\frac{b}{3}} = \left(-a + \sqrt{-\frac{b}{3}}\right)^3.$$

Quant à la quantité placée sous le radical carré, on voit qu'elle devient un carré parfait lorsque deux racines sont de la forme $a + b\sqrt{-3}$, $a - b\sqrt{-3}$, a et b étant commensurables. Ce qui fournirait, au besoin, un moyen de résoudre en nombres commensurables l'équation

$$x^3 + y^2 = z^2.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE, POUR L'ANNÉE 1852

(voir t. XI, p. 108).

MATHÉMATIQUES.

Première question.

Exposer la résolution trigonométrique des triangles rectilignes quelconques.

Application. Étant donnés

$$a = 11723^{m},35,$$
$$b = 9682^{m},87,$$

et l'angle compris

$$C = 82^{o}\,5'\,15'',7,$$

trouver les autres parties du triangle.

Seconde question.

On donne une conique, ellipse, hyperbole ou parabole, et deux axes fixes qui passent par un foyer et font entre eux un angle de grandeur déterminée. On fait rouler sur la courbe une tangente, et, par les points où cette droite rencontre dans chacune de ses positions les axes fixes, on mène deux autres tangentes à la courbe: ces deux dernières tangentes se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique.

Note. Très-bonne question, qui, se ramenant, par la méthode perspective, au cercle et à deux diamètres, donne une solution intuitive. On s'aperçoit que la question a été formulée par des *géomètres* et non par des *chiffreurs*.

PHYSIQUE.

Qu'est-ce que l'on entend par degré hygrométrique de l'air? Quel est le meilleur procédé physique pour en trouver la mesure? Comment peut-on apprécier l'approximation dont la méthode est susceptible? Énumérer nettement et séparément tous les principes de physique sur lesquels on est obligé de s'appuyer. Exposer en peu de mots une démonstration expérimentale ou raisonnée de chacun d'eux.

Propriétés du miroir sphérique convexe.

Note. Nous apprenons avec plaisir que la mesure annoncée au bas de la page 312 a été modifiée. L'élève Frank *Aron* a *enfin* reçu sa lettre d'admission au concours, la *veille* du concours. Il faut se rappeler que nous sommes au milieu du XIX[e] siècle, et non à la fin du XVII[e] siècle, 2 octobre 1685. *Principiis obsta.*

NOTE SUR LE THÉORÈME DE GOLDBACH

(voir p. 278).

Le lecteur s'est sans doute aperçu que c'est par inadvertance qu'on a inséré la *prétendue* première démons-

tration de ce théorème (*). Il faut s'en tenir à celle d'Euler, qui a donné même une plus grande extension à ce théorème qu'il énonce ainsi, mais sans démonstration :

Tout nombre entier qui n'est pas compris dans la formule $4mn - m - n$ est nécessairement compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$.

Et il en conclut que l'expression

$$4mn - m - n + x^2 + y^2 + y$$

renferme tous les nombres possibles. En effet, si le nombre est compris dans $4mn - m - n$, il suffit de faire $x = y = 0$; s'il est compris dans $x^2 + y^2 + y$, il faut faire $m = n = 0$, et, d'après le théorème, le nombre doit être compris dans l'une ou dans l'autre expression; il est facile d'ailleurs de démontrer que le même nombre ne peut être renfermé simultanément dans les deux expressions. En effet, on aurait

$$4mn - m - n = x^2 + y^2 + y;$$

on en tire

$$(4m - 1)(4n - 1) = 4x^2 + (2y + 1)^2;$$

équation impossible; la somme de deux carrés ne peut être divisible par un nombre de la forme $4n - 1$.

Goldbach ajoute qu'on peut ramener $4mn - m - n$ à la forme $y^2 + y - x^2$. En effet, on a

$$\begin{aligned}(4m - 1)(4n - 1) &= (2y + 1)^2 - 4x^2 \\ &= (2y + 2x + 1)(2y - 2x + 1);\end{aligned}$$

on fait

$$\begin{aligned}x &= m - n, \\ y &= m + n - 1;\end{aligned}$$

ainsi tout nombre entier est de la forme $y^2 + y \pm x^2$.

(*) L'équation $n'' = n$ m'a trompé. Il s'agit de $n - n''$; par conséquent, n s'annule, et avec n tout le raisonnement.

c'est-à-dire tout nombre est égal au double d'un nombre triangulaire plus ou moins un carré (le zéro non compris).

Observation. Ce qui précède est dans une Lettre de Goldbach à Euler, datée de Moscou le 7 juin (nouveau style) 1742; *Correspondance mathématique et physique*, tome I, page 125. Les démonstrations sont de M. Lebesgue.

SOLUTION DE LA QUESTION 253

(voir p. 115);

PAR MM. A. THIOLIER, élève à l'École des Mines à Saint-Étienne;
A. EYRIAUD, élève de Mathématiques supérieures au lycée de Douai;
L. PAINVIN, licencié ès sciences mathématiques.

Étant donnés deux cônes de révolution autour du même axe; un plan tangent au premier cône coupe le second cône suivant une conique, et un plan tangent au second cône coupe le premier cône suivant une seconde conique. Une de ces coniques est égale à la *focale* de l'autre conique. (DIEU.)

Démonstration géométrique.

Je supposerai démontrés les théorèmes suivants :

1°. *Le lieu des foyers d'une ellipse, dans l'espace, est une hyperbole ayant son axe transverse égal à la distance des foyers de l'ellipse, et son axe non transverse égal au petit axe de l'ellipse.*

2°. Réciproquement : *Le lieu des foyers d'une hyperbole, dans l'espace, est une ellipse ayant son grand axe égal à la distance des foyers de l'hyperbole, et pour petit axe, l'axe non transverse de l'hyperbole.*

3°. *Le lieu des foyers d'une parabole, dans l'espace, est une parabole égale à la première.*

1er *cas*. Soient SXY le premier cône (*fig*. 1), S′X′Y′ le second. Nous pouvons supposer les deux plans tangents SY et S′X′ perpendiculaires au même méridien.

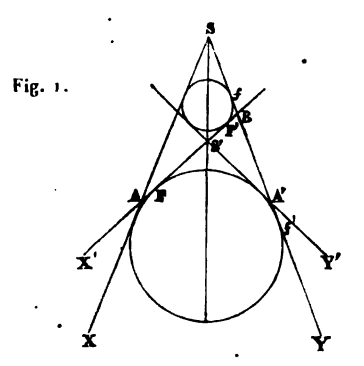


Fig. 1.

Pour démontrer que la courbe d'intersection du cône SXY par le plan S′X′ est égale à la focale de la courbe d'intersection du cône S′X′Y′ par le plan SY, il suffit de démontrer que

$$A'B = FF',$$

et que

$$\sqrt{\overline{ff'}^2 - \overline{A'B}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{FF'}^2};$$

cela revient à démontrer ces deux égalités, $A'B = FF'$ et $AB = ff'$. Or nous savons que $AF = BF'$, que $Bf = A'f'$. Or, comme $Bf = BF'$, on a

$$AF = BF' = Bf = A'f'.$$

Les deux égalités à démontrer se réduiront donc à une seule; car, si nous considérons l'égalité $FF' = A'B$, elle peut s'écrire

$$FF' + AF + BF' = A'B + Bf + A'f',$$

ou

$$AB = ff'.$$

La question revient donc à démontrer seulement cette dernière égalité.

Or on a

$$BF = Bf';$$

donc on a aussi

$$BF + FA = Bf' + Bf,$$

ou

$$AB = ff'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2e *cas.* Le plan tangent au premier cône coupe le second, suivant une parabole.

Il est évident alors que les deux cônes ont des angles au sommet égaux; alors la simple considération de la symétrie de la figure fait voir clairement que les deux paraboles d'intersection sont égales: il serait du reste facile de faire une démonstration plus rigoureuse.

Démonstration analytique (*).

Je suppose que l'on ne connaisse aucun des théorèmes énoncés au commencement de la démonstration précédente, et je vais faire la démonstration directe de la question proposée.

Considérons deux cas : 1° le plan tangent à l'un des cônes coupera le second suivant une ellipse ou une hyperbole; 2° il le coupera suivant une parabole.

L'équation générale des sections coniques est

$$y^2 = \frac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} x - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta} x^2,$$

$$\alpha = SAB, \quad \text{et} \quad 2\beta = ASB, \quad d = SA.$$

Considérons le premier cas et rapportons la courbe à son centre; pour cela il suffira de changer x en $x + a$, ce qui

(*) Ce qui suit appartient à MM. Painvin et Thiolier.

donnera

$$y^2 = \left. \begin{array}{l} \dfrac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} \\ -\dfrac{2a \sin\alpha \sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} \end{array} \right| x - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} x^2 + \frac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta} a, \\ - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} a^2;$$

ce qui donne pour l'abscisse du centre

$$a = \frac{d \sin 2\beta}{2 \sin(\alpha+2\beta)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation, on aura

$$\text{(A)} \qquad y^2 + \frac{\sin\alpha \sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta} x^2 = \frac{d^2 \sin\alpha \sin^2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}.$$

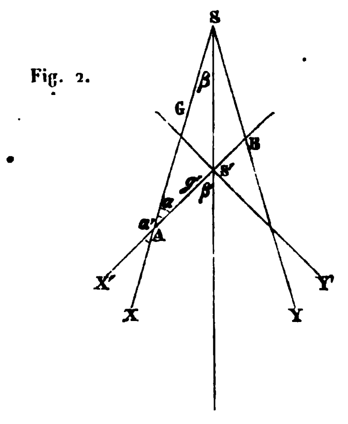


Fig. 2.

Or nous voyons que si l'on considère maintenant l'intersection du cône S'X'Y' par le plan SX, il suffira de changer α en $360^\circ - \alpha$, β en $\alpha + \beta$ et d en $d \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$: alors nous aurons

$$\text{(B)} \qquad y^2 - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)} x^2 = -\frac{d^2 \sin\alpha \sin^2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}.$$

On voit facilement que si l'équation (A) représente une

ellipse, l'équation (B) représentera une hyperbole, et réciproquement.

Cherchons maintenant le lieu des foyers de la courbe représentée par l'équation (A), et démontrons que son équation est identique à celle de la courbe représentée par l'équation (B).

Soient p, q, r les coordonnées de l'un quelconque des foyers, écrivons que sa distance à l'un des points quelconques de la courbe est une fonction rationnelle entière et du premier degré des coordonnées de ce point, ce qui nous donnera la relation

$$\text{(C)} \qquad (x-p)^2+(y-q)^2+r^2=(my+nx+s)^2,$$

en prenant pour plan des xy le plan de la courbe lui-même, pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce plan par le centre de la courbe, pour plans des zx et des zy les plans qui passent par l'axe des z et les axes correspondants de la courbe.

Identifions la relation (C) avec l'équation (A); nous aurons les cinq relations suivantes :

$$(1) \qquad mn=0,$$

$$(2) \qquad \frac{1-n^2}{1-m^2}=\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta},$$

$$(3) \qquad \frac{p+ns}{1-m^2}=0,$$

$$(4) \qquad \frac{q+ms}{1-m^2}=0,$$

$$(5) \qquad p^2+q^2+r^2-s^2=-\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}.$$

La relation (1) donne $m=0$ et $n=0$. Supposons d'abord $m=0$, alors la relation (4) donne $q=0$, ce qui prouve que le lieu sera contenu tout entier dans le plan

des zx. La relation (2) donne

$$n = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}}{\cos\beta},$$

et, en simplifiant,

$$n = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\beta};$$

la relation (3) donne

$$s = -\frac{p\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (5), nous aurons l'équation du lieu

$$p^2 + r^2 - \frac{p^2\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha + \beta)} = -\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha + 2\beta)},$$

et, en simplifiant,

$$\text{(D)} \qquad r^2 - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2(\alpha + \beta)}p^2 = -\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha + 2\beta)}.$$

On voit donc que cette équation ne diffère de l'équation (B) que par le nom des variables; elle représente donc un lieu identique. C. Q. F. D.

Note. M. Thiolier démontre de la même manière le cas de la parabole.

FORMULES DES FONCTIONS DE M. STURM POUR LES ÉQUATIONS DU DEUXIÈME, DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

Par M. KORALEK,
Professeur.

1. On trouve ordinairement ces fonctions calculées pour des équations tronquées; nous croyons utile de donner ces fonctions pour des équations complètes. On n'aura

besoin que de faire des substitutions numériques pour connaître immédiatement le nombre et les signes des racines réelles.

Équation du deuxième degré.

$$V = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$
$$V_1 = 2 A_2 x + A_1,$$
$$V_2 = A_1^2 - 4 A_0 A_2.$$

Équation du troisième degré.

$$V = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$
$$V_1 = 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1,$$
$$V_2 = 2 x (A_2^2 - 3 A_1 A_3) + (A_1 A_2 - 9 A_0 A \dots,$$
$$V_3 = - 4 A_0 A_2^3 A_3 + 18 A_0 A_1 A_2 A_3^2$$
$$- 27 A_0^2 A_3^2 + A_1^2 A_2^2 A_3 - 4 A_1^3 A_3^2.$$

Équation du quatrième degré.

$$V = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$
$$V_1 = 4 A_4 x^3 + 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1,$$
$$V_2 = p x^2 + q x + r, \quad p = 3 A_3^2 - 8 A_2 A_4,$$
$$q = 2 A_2 A_3 - 12 A_1 A_4, \quad r = A_1 A_3 - 16 A_0 A_4,$$
$$V_3 = a x + b,$$
$$16 a = (2 A_2 A_3 - 12 A_1 A_4)(9 A_3^2 - 32 A_2 A_3 A_4 + 48 A_1 A_4^2)$$
$$-(3 A_3^2 - 8 A_2 A_1)(6 A_2 A_3^2 - 16 A_2^2 A_4 - 4 A_1 A_3 A_4 + 64 A_0 A_4^2),$$
$$a = 32 A_0 A_2 A_4^2 - 12 A_0 A_3^2 A_4^2 + 28 A_1 A_2 A_3 A_4^2 - 6 A_1 A_3^3 A_4$$
$$- 36 A_1^2 A_4^3 + 2 A_2^2 A_3^2 A_4 - 8 A_2^3 A_4^2,$$
$$16 b = (A_1 A_3 - 16 A_0 A_4)(9 A_3^2 - 32 A_2 A_3 A_4 + 48 A_1 A_4^2)$$
$$- A_1 (3 A_3^2 - 8 A_2 A_4)^2,$$
$$b = - 48 A_0 A_1 A_4^3 + 32 A_0 A_2 A_3 A_4^2 - 9 A_0 A_3^3 A_4$$
$$+ A_1 A_2 A_3^2 A_4 - 4 A_1 A_2^2 A_4^2 + 3 A_1^2 A_3 A_4^2,$$
$$V_4 = b (a q - b p) - a^2 r.$$

Note. Pour connaître le nombre des racines réelles d'une équation algébrique de degré n, il suffit de connaître les coefficients des *premiers* termes

des fonctions de M. *Sturm*. Or, ces coefficients se calculent facilement d'après le procédé de M. Cayley (*Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 298; 1846).

Soit l'équation

$$V = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} + \ldots + (-1)^n p_n.$$

On a

$$V_m = A x^{n-m} + \ldots;$$

représentons par S_t la somme des racines élevées chacune à la puissance t.

Formons les suites

$$\begin{aligned}
Q_m &= S_{m-1}, \\
Q_{m+1} &= S_m - p_1 S_{m-1}, \\
Q_{m+2} &= S_{m+1} - p_1 S_m + p_2 S_{m-1}, \\
Q_{m+3} &= S_{m+2} - p_1 S_{m+1} + p_2 S_m - p_3 S_{m-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_{2m-1} &= S_{2m-2} - p_1 S_{2m-3} + p_2 S_{2m-4} + \ldots + (-1)^{m-1} p_{m-1} S_{m-1};
\end{aligned}$$

on aura

$$A = \text{déterminant} \left\{ \begin{matrix} S_0, & S_1, & S_2, \ldots, & S_{m-2}, & Q_m \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_{m-1}, & Q_{m+1} & \\ S_2, & S_3, \ldots, & S_m, & Q_{m+2} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-3}, & Q_{2m-1} & \end{matrix} \right\}.$$

TM.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Première question. *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une courbe liée à un axe vertical autour duquel elle tourne uniformément; on demande à quelle condition cette courbe doit être assujettie pour que le point glisse d'un mouvement uniforme.*

Seconde question. *Une droite sur laquelle un point matériel pesant glisse sans frottement, tourne uniformément autour d'un axe horizontal auquel elle est liée; déterminer le mouvement du point sur la droite.*

1°. Le mouvement du point sur la courbe tournant autour de l'axe est identique à celui qu'il aurait sur cette courbe rendue fixe, si on lui appliquait continuellement une force égale à la force centrifuge provenant de la rotation autour de l'axe; donc il s'agit de trouver la courbe pour laquelle la somme des composantes tangentielles de la force centrifuge et de la pesanteur est toujours nulle.

L'axe des z coïncidant avec l'axe vertical fixe et étant dirigé de bas en haut, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point à la fin du temps t, par ds l'élément correspondant de la courbe, et par ω la vitesse angulaire constante autour de l'axe des z, la composante tangentielle de la pesanteur est $-g\frac{dz}{ds}$, et celle de la force centrifuge est $\omega^2\left(x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}\right)$, car les composantes de cette force suivant les directions des axes sont $x\omega^2$, $y\omega^2$ et o. Ainsi la courbe doit satisfaire à l'équation différentielle

$$g\,dz = \omega^2(x\,dx + y\,dy),$$

dont l'intégrale est

$$z - C = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2),$$

qui représente un paraboloïde de révolution autour de l'axe fixe. Donc, la condition demandée est que :

La courbe engendre, en tournant autour de l'axe fixe, un paraboloïde dont la distance du foyer au sommet soit égale à $\frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}$.

2°. La droite fixe étant prise pour axe des x, et le plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde engendré par la droite mobile A, pour celui des $\widehat{yz}$; l'axe des z sera vertical et dirigé de bas en haut, celui des y horizontal et dirigé de manière que la rotation de A autour de l'axe des x s'effectue de celui des y vers celui des z. Cela posé, soient :

ω la vitesse angulaire constante avec laquelle A tourne autour de l'axe des x;
r le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde, égal à la plus courte distance de ces deux droites;
a l'x d'un point B de A;
R la distance de B à l'axe des x;
δ l'angle que la projection de R sur $\widehat{yz}$ fait avec l'axe des y quand $t = 0$;
α l'angle constant que A fait avec l'axe des x, et, à la fin du temps t, β, γ les angles (variables) que A fait avec les deux autres axes de coordonnées;
x, y, z les coordonnées du mobile, à la fin du temps t;
s la longueur (prise avec le même signe que x) de la partie de A comprise entre le plan $\widehat{yz}$ et le point (x, y, z).

A la fin du temps t, qui sera compté à partir de l'instant où la droite A coupe Oy, les coordonnées du point où elle perce $\widehat{yz}$ sont

$$0, \quad r\cos\omega t, \quad r\sin\omega t;$$

et celles de B sont

$$a, \quad \mathrm{R}\cos(\delta + \omega t), \quad \mathrm{R}\sin(\delta + \omega t);$$

donc

$$\cos\beta = \cos\alpha . \frac{R\cos(\delta + \omega t) - r\cos\omega t}{a},$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha . \frac{R\sin(\delta + \omega t) - r\sin\omega t}{a},$$

et

$$y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\, x + r\cos\omega t, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\, x + r\sin\omega t.$$

D'ailleurs, en prenant convenablement le sens des x positives, on a

$$x = s\cos\alpha.$$

Les composantes parallèles aux axes de la force centrifuge sont, pour le point (x, y, z),

$$0, \quad \omega^2 y, \quad \omega^2 z;$$

donc la composante de cette force suivant la droite A est exprimée par

$$\omega^2(y\cos\beta + z\cos\gamma),$$

ce qui revient à

$$\omega^2\left(s.\sin^2\alpha + r\cos\alpha . \frac{R\cos\delta - r}{a}\right),$$

d'après les équations précédentes, et eu égard à ce que $\cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha$.

Enfin, la composante de la pesanteur g suivant la droite A est

$$-g\cos\alpha . \frac{R\sin(\delta + \omega t) - r\sin\omega t}{a}.$$

D'après cela, l'équation du mouvement suivant la droite A est

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \omega^2\sin^2\alpha . s = -g\cos\alpha . \frac{R\sin(\delta + \omega t) - r\sin\omega t}{a}$$
$$+ r\omega^2\cos\alpha . \frac{R\cos\delta - r}{a}.$$

On voit facilement que, C, C′ désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale de cette équation est

$$s = Ce^{\omega t \sin\alpha} + C'e^{-\omega t \sin\alpha}$$
$$+ g\cos\alpha.\frac{R\sin(\delta+\omega t) - r\sin\omega t}{a\omega^2(1+\sin^2\alpha)} - \frac{r\cos\alpha.(R\cos\delta - r)}{a\sin^2\alpha}$$

(e est la base des logarithmes népériens); et, par suite, on a, en désignant par v la vitesse du mobile à la fin du temps t,

$$v = \omega\sin\alpha.\left(Ce^{\omega t\sin\alpha} - C'e^{-\omega t\sin\alpha}\right)$$
$$+ g\cos\alpha.\frac{R\cos(\delta+\omega t) - r\cos\omega t}{a\omega(1+\sin^2\alpha)}.$$

Ces deux formules donneront les valeurs de s, v, à un instant quelconque, quand on aura déterminé C, C′, d'après les valeurs initiales; elles feront par conséquent connaître le mouvement du point matériel sur la droite A, dont la position sera déterminée par les coordonnées du point où elle perce le plan $\widehat{yz}$, et les valeurs correspondantes de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ou, si l'on aime mieux, on calculera x, y, z au moyen des équations qui ont d'abord été posées.

Si $C \gtrless 0$, le terme qui contient $e^{\omega t \sin\alpha}$, comme facteur, finira toujours par dominer dans les valeurs de s et de v qui croîtront indéfiniment avec t.

Si $C = 0$, ce seront au contraire les termes contenant les lignes trigonométriques qui domineront à la longue, de sorte que le mouvement tendra à devenir oscillatoire.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1849;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION DE MÉCANIQUE (*).

Deux points matériels pesants s'attirent en raison directe des masses, et en raison inverse des carrés des distances; ils ont des vitesses initiales parallèles et dirigées dans un même plan vertical : déterminer le mouvement de ces points dans le vide.

Il est d'abord évident qu'ils ne sortiront pas du plan vertical des vitesses initiales.

Soient :

m, m' les masses des deux points, et $m + m' = m_1$;
v_0, v'_0 les vitesses initiales de m et m';
G le centre de gravité de ces masses à un instant quelconque;
(v_0 sera positive, v'_0 positive ou négative, selon qu'elle sera de même sens que v_0 ou de sens opposé).

G se mouvra dans le plan des vitesses initiales comme un point matériel pesant et libre, qui partirait de la position initiale de G avec la vitesse

$$\frac{mv_0 + m'v'_0}{m_1}$$

parallèle à v_0 (principe du mouvement du centre de gravité). Donc, G décrira une parabole si cette vitesse n'est pas nulle ou verticale, et une droite dans ces deux cas particuliers.

(*) La composition d'analyse de l'année 1849 se trouve à la page 66.

Pour reconnaître quels seront les mouvements de m et m' relativement à G, il faut : 1° imprimer d'abord à ces masses des vitesses égales et contraires à la vitesse initiale de G, de sorte que leurs vitesses initiales deviendront respectivement

$$\frac{m'}{m_1}(v_0 - v'_0), \quad -\frac{m}{m_1}(v_0 - v'_0);$$

2° leur appliquer à chaque instant une force accélératrice égale et contraire à la pesanteur qui ferait suivre à un point matériel libre le mouvement du point G (principes des mouvements relatifs). Or la force accélératrice ajoutée ainsi, détruisant l'effet de la pesanteur sur m et m', les mouvements de ces masses par rapport au point G ne seront dus qu'à leurs vitesses initiales relatives, et à leur action mutuelle. Mais cette action donne pour m et m' des forces qui sont toujours en raison inverse des carrés des distances de ces points au point G; car on a, d'après une loi connue,

$$r = \frac{m_1}{m'}\rho = \frac{m_1}{m}\rho',$$

r, ρ et ρ' désignant les distances (m, m'), (m, G) et (m', G), de sorte que les forces appliquées à m et m' sont représentées par

$$\frac{m m'^3 \mu}{m_1^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{m^3 m' \mu}{m_1^2} \cdot \frac{1}{\rho'^2},$$

μ désignant l'action mutuelle rapportée à l'unité de masse et à l'unité de distance. Donc :

Les mouvements relatifs de m et m' autour de G s'effectueront, en général, sur des sections coniques à éléments constants, dont un foyer suivra le mouvement de G; et ces coniques pourront, dans des cas particuliers, se réduire à des circonférences ou à des droites.

On a toujours

$$\rho' : \rho :: m : m' ;$$

donc :

Les trajectoires relatives de m et m' autour de G sont des lignes homothétiques, dont le point G est un centre d'homothétie inverse.

Il résulte de cette exposition que les formules connues donneront, à chaque instant, la position et la vitesse absolue de G, ainsi que la position et la vitesse de m et m' relativement à G. On trouvera la position absolue de m et m' par une addition de coordonnées, et la vitesse absolue de l'une ou de l'autre de ces masses, en prenant la résultante de la vitesse relative et de la vitesse absolue de G transportée à cette masse.

Si l'on applique le calcul à la question, on sera d'abord conduit aux conclusions qui précèdent. Nous ne donnerons pas cette application (il s'y présente, pour la détermination des constantes arbitraires, des choses analogues à celles qu'on trouve dans la solution du problème de Mécanique de l'année 1841, *Nouvelles Annales*, tome X, page 330), parce qu'elle n'offre pas beaucoup d'intérêt et qu'elle est fort longue, attendu qu'il faut considérer successivement un assez grand nombre d'hypothèses, quant aux circonstances initiales qui influent sur la nature des trajectoires et des mouvements de m et m' relatifs à G, et absolus.

Nous dirons seulement que les trajectoires absolues de m et m', transcendantes dans tous les autres cas, sont algébriques dans celui où les trajectoires relatives sont des paraboles. Enfin, nous ferons remarquer que, si l'on avait

$$mv_0 + m'v'_0 = 0,$$

c'est-à-dire si les quantités initiales de mouvement de m

et m' étaient égales et de sens opposés, G ne bougerait pas, de telle sorte que les trajectoires absolues de m et m' ne seraient autres que leurs trajectoires relatives à G.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850;

Par M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

Si une courbe à double courbure a sa première courbure constante, le lieu géométrique des centres de courbure se confond avec l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe des plans normaux, et réciproquement.

Le rayon de courbure R est donné pour chaque point M (x, y, z) de la courbure par la formule

$$R^2 = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2},$$

en prenant x pour variable indépendante, et désignant par y', y'', z', z'' les dérivées première et seconde de y et z; et, puisque R est constant, on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} 3(y'y'' + z'z'')[(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2] \\ -[(y'z''-z'y'')(y'z'''-z'y''')+y''y'''+z''z'''](1+y'^2+z'^2)=0. \end{array} \right.$$

Le centre de courbure A (ξ, η, ζ) est déterminé pour le point M par l'équation du plan osculateur, celle du plan normal, et la dérivée de cette dernière équation, savoir :

$$(2)\quad (\xi - x)(y'z'' - z'y'') - (\eta - y)z'' + (\zeta - z)y'' = 0,$$

$$(3)\quad \xi - x + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$

$$(4)\quad (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 1 + y'^2 + z'^2;$$

et le point B de l'arête de rebroussement, correspondant à M, dont on peut aussi représenter les coordonnées par ξ, η, ζ, est déterminé par les équations (3), (4), et par la dérivée de l'équation (4),

$$(5) \qquad (\eta - y)\, y''' + (\zeta - z)\, z''' = 3(y'y'' + z'z'').$$

Or, si l'on tire des équations (2), (3), (4) les valeurs de ξ, η, ζ, ou plutôt de $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, puis qu'on substitue celles de $\eta - y$, $\zeta - z$ dans l'équation (5), on trouve que le résultat ne diffère pas de l'équation (1). Donc on déduirait des équations (3), (4), (5) les mêmes valeurs de ξ, η, ζ, et, par conséquent, B *coïncide avec* A, *quel que soit* M, ce qui démontre la proposition directe.

La réciproque n'est pas plus difficile à prouver. En effet, pour que le lieu des centres de courbure se confonde avec l'arête de rebroussement dont il s'agit, il faut et il suffit, d'après ce que nous venons de dire, que la courbe satisfasse à l'équation (1). Mais, en posant

$$1 + y'^2 + z'^2 = u, \quad (y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2 = v,$$

cette équation devient

$$3\,v\,du - u\,dv = 0,$$

et, en intégrant, on a

$$\frac{u^3}{v} = \text{const.},$$

ou bien

$$R = \text{const.},$$

C. Q. F. D.

SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 232 (PROUHET)

(voir t. X, p. 182);

PAR M. P. TARDY,
Professeur à Gênes.

P_0 étant l'aire d'un polygone convexe de n côtés; P_1 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux des côtés du premier polygone; P_2 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux des côtés du second polygone, et ainsi de suite; il s'agit de démontrer qu'on a

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &P_0 - \frac{n^2-2^2}{1.2.3}P_1 + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}P_2 - \ldots \\ &+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots(n-1)}P_{\frac{n-2}{2}} = 0, \end{aligned}\right.$$

si n est pair, et

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &P_0 - \frac{n^2-1^2}{1.2}P_1 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}P_2 - \ldots \\ &+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots(n-1)}P_{\frac{n-1}{2}} = 0, \end{aligned}\right.$$

si n est impair.

Lemme. Soit la série hypergéométrique

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\delta}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}x \\ &+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\delta(\delta+1)}\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2 - \ldots. \end{aligned}\right.$$

En mettant $\alpha+1$ pour α et $\beta+1$ pour β, et ôtant la

série primitive, on obtient la relation

$$(b)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon)=\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ -\frac{\gamma}{\varepsilon}\cdot\frac{\alpha+\beta+1}{\delta}x.\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1). \end{cases}$$

De la même manière on aura

$$\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma,\delta\,\varepsilon)=\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ +M\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1),$$

ou

$$\varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma,\delta,\varepsilon)=\varphi+\lambda_1\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1) \\ +\lambda_2\varphi(\alpha,\beta+2,\gamma+2,\delta+2,\varepsilon+2);$$

et en général par une continuelle application de la relation (b), on arrive à cette formule

$$(c)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+m,\beta+m,\gamma,\delta,\varepsilon)=\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ +A_1\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1)+\ldots \\ +A_m\varphi(\alpha,\beta+m,\gamma+m,\delta+m,\varepsilon+m). \end{cases}$$

De là nous pouvons conclure que si pour des valeurs particulières de x, α, β, γ, δ, ε, on a

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)=0,$$

et

$$\varphi(\alpha,\beta+\mu,\gamma+\mu,\delta+\mu,\varepsilon+\mu)=0,$$

μ désignant un entier quelconque, la série (a) sera toujours nulle, lorsque sans changer x, γ, δ, ε; on augmente α et β d'un entier m à volonté.

Cela posé, soient x_1, y_1, x_2, y_2,..., x_n, y_n les coordonnées des n sommets du polygone donné; les coordonnées des sommets du premier polygone inscrit seront

$$\frac{x_1+x_2}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2};\quad \frac{x_2+x_3}{2},\quad \frac{y_2+y_3}{2},\ldots,\quad \frac{x_n+x_1}{2},\quad \frac{y_n+y_1}{2};$$

celles des sommets du second polygone inscrit seront

$$\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}, \quad \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}, \ldots,$$
$$\frac{x_n + 2x_1 + x_2}{4}, \quad \frac{y_n + 2y_1 + y_2}{4};$$

et en général en appelant $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ les coordonnées du sommet (q) du polygone inscrit de l'ordre (p), nous aurons

$$x_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l} (p)_0 . x_q + (p)_1 . x_{q+1} + (p)_2 . x_{q+2} + \ldots \\ + (p)_{p-1} . x_{q+p-1} + (p)_p . x_{q+p} \end{array}\right],$$
$$y_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l} (p)_0 . y_q + (p)_1 . y_{q+1} + (p)_2 . y_{q+2} + \ldots \\ + (p)_{p-1} . y_{q+p-1} + (p)_p . y_{q+p} \end{array}\right],$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$(p)_m = \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

et où il faut prendre les indices de x et de y égaux au reste de leur division par n toutes les fois qu'ils deviennent plus grands que n.

Si nous supposons $p < n$, puisqu'on a $(p)_m = 0$ pour $m > p$, nous pouvons écrire les valeurs des coordonnées $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ ainsi :

$$x_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l} (p)_0 x_q + (p)_1 x_{q+1} + \ldots \\ + (p)_{n-q} x_n + (p)_{n-q+1} x_1 + \ldots + (p)_{n-1} x_{q-1} \end{array}\right],$$
$$y_q^{(p)} = \frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l} (p)_0 y_q + (p)_1 y_{q+1} + \ldots \\ + (p)_{n-q} y_n + (p)_{n-q+1} y_1 + \ldots + (p)_{n-1} y_{q-1} \end{array}\right].$$

Maintenant on sait que la surface P_p est donnée par l'expression

$$P_p = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x_1^{(p)} y_2^{(p)} - x_2^{(p)} y_1^{(p)} + x_2^{(p)} y_3^{(p)} - x_3^{(p)} y_2^{(p)} + \ldots \\ \qquad + x_n^{(p)} y_1^{(p)} - x_1^{(p)} y_n^{(p)} \end{array}\right\}.$$

En substituant pour ces coordonnées leurs valeurs, et cherchant le coefficient θ_s du terme général $x_q y_{q+s}$, on trouvera, avec un peu d'attention,

$$\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}} \left\{ \begin{array}{l} (p)_0 (p)_{s-1} + (p)_1 (p)_s + (p)_2 (p)_{s+1} + \ldots + (p)_{n-s} (p)_n \\ + (p)_{n-s+1} (p)_0 + (p)_{n-s+2} (p)_1 + \ldots + (p)_{n-1} (p)_{s-2} \\ - (p)_0 (p)_{s+1} - (p)_1 (p)_{s+2} - \ldots - (p)_{n-s-2} (p)_{n-1} \\ - (p)_{n-s-1} (p)_0 - (p)_{n-s} (p)_1 - \ldots - (p)_{n-1} (p)_s \end{array} \right.$$

Observons que ce coefficient est indépendant de q et dépend seulement de s; qu'il s'évanouit pour $s = 0$ et pour $s = \frac{n}{2}$ dans le cas que n soit pair; qu'il revient le même si la différence entre les indices de y et de x est $s - n$; qu'il change de signe si cette différence devient $-s$, ou $n - s$.

Il n'est donc pas nécessaire de l'évaluer au delà de $s = \frac{n-2}{2}$ si n est pair, ou de $s = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

Pourtant si nous dénotons par A_s la somme des termes dans lesquels la différence entre les indices soit égale à s, ou à $s - n$, diminuée de la somme de ceux dans lesquels cette différence soit $-s$ ou $n - s$; c'est-à-dire si nous posons

$$\begin{aligned} A_s = {} & x_1 y_{s+1} + x_2 y_{s+2} + \ldots + x_{n-s} y_n + x_{n-s+1} y_1 + \ldots + x_n y_s \\ & - x_{s+1} y_1 - x_{s+2} y_2 - \ldots - x_n y_{n-s} - x_1 y_{n-s+1} - \ldots - x_s y_n, \end{aligned}$$

il est clair que nous obtiendrons

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \ldots + \theta_{\frac{n-2}{2}} A_{\frac{n-2}{2}} \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

et

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \ldots + \theta_{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

Maintenant, si nous limitons l'ordre p du dernier polygone inscrit à $\frac{n-2}{2}$ si n est pair, ou à $\frac{n-1}{2}$ si n est im-

pair, les coefficients binomiaux $(p)_{n-s}$, $(p)_{n-s+1}$, $(p)_{n-1}$ s'évanouiront tous, et la valeur de θ_s se réduira à

$$\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}} \left\{ \begin{array}{l} (p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \ldots + (p)_{p-s+1}(p)_p \\ -(p)_0(p)_{s+1} - (p)_1(p)_{s+2} - (p)_2(p)_{s+3} - \ldots - (p)_{p-s-1}(p)_p \\ -(p)_{n-s-1}(p)_0 \end{array} \right\}.$$

De la formule générale

$$(u+v)_m = (u)_m(v)_0 + (u)_{m-1}(v)_1 + (u)_{m-2}(v)_2 + \ldots + (u)_1(v)_{m-1} + (u)_0(v)_m$$

(*Voir* Cauchy, *Cours d'Analyse*, ch. IV, § 3, p. 100; 1821), en faisant

$$u = v = p, \quad m = p - s + 1,$$

et en se rappelant que

$$(u)_\lambda = (u)_{u-\lambda},$$

on tire

$$(p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \ldots + (p)_{p-s+1}(p)_p = (2p)_{p-s+1},$$

et en faisant $m = p - s - 1$,

$$(p)_0(p)_{s+1} + (p)_1(p)_{s+2} + \ldots + (p)_{p-s-1}(p)_p = (2p)_{p-s-1},$$

où l'on voit qu'il faut prendre $(2p)_{-\lambda} = 0$.

Le dernier terme de θ_s $(p)_{n-s-1}(p)_0$ sera toujours nul, excepté le cas de $s = \frac{n-1}{2}$, parce qu'alors il devient $(p)_{\frac{n-1}{2}}$ et pour $p = \frac{n-1}{2}$ est égal à l'unité.

De cette manière, nous aurons

$$2^{2p+1}P_p = A_1[(2p)_p - (2p)_{p-2}] + A_2[(2p)_{p-1} - (2p)_{p-3}] + \ldots + A_{1+k}[(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2}] + \ldots + A_{\frac{n-2}{2}} \cdot (2p)_{p-\frac{n-4}{2}}, \quad n \text{ pair};$$

$$2^{2p+1}P_p = A_1[(2p)_p - (2p)_{p-2}] + A_2[(2p)_{p-3}] + \ldots + A_{1+k}[(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2}] + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}}\left[(2p)_{p-\frac{n-3}{2}} - (p)_{\frac{n-1}{2}}\right], \quad n \text{ impair}.$$

Ayant égard ensuite à l'égalité

$$(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2} = 2 \cdot \frac{(2p+1)(1+k)}{(p-k-1)(p-k)} \cdot (2p)_{p-k-2}$$
$$= 2 \cdot \frac{1+k}{p-k} (2p+1)_{p-k-1};$$

nous pouvons écrire

$$2^{2p} P_p = \frac{1}{p}(2p+1)_{p-1} \cdot A_1 + \frac{2}{p-1}(2p+1)_{p-2} \cdot A_2 + \ldots$$
$$+ \frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1} \cdot A_{1+k} + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{n-4}{2}}{p - \frac{n-6}{2}} (2p+1)_{p-\frac{n-4}{2}} \cdot A_{\frac{n-4}{2}}$$
$$+ \frac{\frac{n-2}{2}}{p - \frac{n-4}{2}} (2p+1)_{p-\frac{n-2}{2}} \cdot A_{\frac{n-2}{2}},$$

si n est pair ; et

$$2^{2p} P_p = \frac{1}{p}(2p+1)_{p-1} \cdot A_1 + \frac{2}{p-1}(2p+1)_{p-2} \cdot A_2 + \ldots$$
$$+ \frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1} \cdot A_{1+k} + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{n-3}{2}}{p - \frac{n-5}{2}} (2p+1)_{p-\frac{n-3}{2}} \cdot A_{\frac{n-3}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(2p)_{p-\frac{n-3}{2}} - (p)_{\frac{n-1}{2}}\right] A_{\frac{n-1}{2}},$$

si n est impair.

Dans ces équations, il faut substituer au coefficient d'un terme quelconque du second membre, par exemple

de A_{1+k}, c'est-à-dire à la quantité $\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1}$; $\frac{1}{2}(2p)_{p-k} = \frac{1}{2}$ lorsque p devient égal à k.

En opérant ces substitutions dans les formules (A), (B), et en réfléchissant que P_k sera la première à introduire le terme A_{1+k}, on aura, dans le cas de n pair, pour coefficient de A_{1+k} la série suivante :

$$(-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2k)^2]}{1.2.3\ldots(2k+1)} \cdot \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{n^2-(2k+2)^2}{(2k+2)(2k+3)} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{1+k}{1} \cdot (2k+3)_0 \\ + \dfrac{[n^2-(2k+2)^2][n^2-(2k+4)^2]}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \\ \times \dfrac{1}{2^3} \cdot \dfrac{1+k}{2}(2k+5)_1 - \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}-k} \\ \times \dfrac{[n^2-(2k+2)^2][n^2-(2k+4)^2]\ldots[n^2-(n-2)^2]}{(2k+2)(2k+3)\ldots(n-1)} \\ \times \dfrac{1}{2^{n-2k-3}} \cdot \dfrac{1+k}{\frac{n-2}{2}-k}(n-1)_{\frac{n-2k-4}{2}} \end{array} \right\}.$$

Considérons la série entre parenthèses, et faisons $\frac{n}{2} = r$; elle pourra se mettre sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{r-k-1}{1} \cdot \dfrac{r+k+1}{2k+3} \\ + \dfrac{(r-k-1)(r-k-2)}{1.2} \cdot \dfrac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)} \\ - \dfrac{(r-k-1)(r-k-2)(r-k-3)}{1.2.3} \\ \times \dfrac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)} + \ldots \end{array} \right.$$

La plus petite valeur que r peut recevoir pour une valeur donnée de k est évidemment $k+2$, parce que, pour arriver à P_k, il faut que le dernier indice de P dans la formule (A), c'est-à-dire $\frac{n-2}{2}$, soit au moins $=k$. Or, je dis que la série (1) est toujours égale à zéro. En effet, elle est un cas particulier de la série (a) du lemme, celui dans lequel on poserait

$$\alpha=r-k-1,\quad \beta=r+k+1,\quad \delta=2k+3,\quad \gamma=\varepsilon=x=1;$$

de plus, on voit tout de suite qu'elle est nulle pour $r=k+2$, et nulle aussi lorsqu'on augmente β, δ, γ, ε d'un nombre entier quelconque m; on en conclut donc par le lemme qu'elle s'évanouira pour des valeurs quelconques entières de r et de k, pourvu que $r \geqq k+2$.

De cette manière, la première formule (A) est complétement démontrée.

Passons au cas de n impair.

En faisant la substitution de l'autre valeur de P_p dans le premier membre de l'équation (B), on en tirera pour le coefficient de A_{1+k},

$$(-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^3)\ldots[(n^2-(2k-1)^2]}{1.2.3\ldots(2k)}$$

$$\times\left\{\begin{aligned} &1-\frac{n^2-(2k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1+k}{1}(2k+3)_0\\ &+\frac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k-3)^2]}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)}\\ &\times\frac{1}{2^3}(2k+5)_1\,.\,\frac{1+k}{2}+\ldots\\ &+\frac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k+3)^2]\ldots[(n^2-(n-2)^2]}{(2k+1)(2k+2)\ldots(n-1)}\\ &\times\frac{1}{2^{n-2k-2}}\cdot\frac{1+k}{\frac{n-1}{2}-k}\cdot(n)_{\frac{n-3}{2}-k}\end{aligned}\right\},$$

Cette valeur n'est pas exacte pour $k=\frac{n-3}{2}$, et nous aurons, au lieu de celle-ci, pour la valeur du coefficient de $A_{\frac{n-1}{2}}$, la quantité suivante :

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-4)^2]}{1.2\ldots(n-3)}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}$$
$$+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$\times\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n-2}{1}\left(\frac{n-1}{2}\right)_0,$$

qui est évidemment zéro.

Prenons la série entre parenthèses du coefficient de A_{1+k} et mettons $\frac{n-1}{2}=r$; en réduisant, on verra qu'elle peut se présenter sous la forme

$$1-\frac{r-k}{1}\cdot\frac{r+k+1}{2k+3}\cdot\frac{2k+3}{2k+1}+\frac{(r-k)(r-k-1)}{1.2}$$
$$\times\frac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)}\cdot\frac{(2k+3)(2k+5)}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$-\frac{(r-k)(r-k-1)(r-k-2)}{1.2.3}$$
$$\times\frac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)}$$
$$\times\frac{(2k+3)(2k+5)(2k+7)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}+\ldots.$$

On déduit aussi cette série de celle du lemme en prenant

$$\alpha=r-k,\quad \beta=r+k+1,\quad \gamma=\frac{2k+3}{2},$$
$$\delta=2k+3,\quad \varepsilon=\frac{2k+1}{2},\quad x=1.$$

La plus petite valeur de r est $k+2$, et l'on vérifie tout de suite que pour cette valeur la série se réduit à zéro, et

qu'elle reste égale à zéro en augmentant β, γ, δ, ε d'un nombre entier m à volonté; par conséquent il en suit qu'elle s'évanouira toujours pour des nombres entiers quelconques r et k, pourvu que $r \geqq k + 2$.

Ainsi est entièrement démontrée l'autre formule (B) pour le cas d'un polygone d'un nombre impair de côtés.

Quoique la démonstration précédente nous semble tout à fait rigoureuse, cependant nous croyons que M. Prouhet, qui a proposé cette question, y est parvenu par une voie plus simple (*), et il est à souhaiter qu'il fasse connaître la suite des raisonnements qui l'ont conduit à ces formules. Nous ferons observer, en terminant, que les équations (A) et (B) se vérifient immédiatement si le polygone est régulier. En effet, en désignant par Δ le côté du polygone donné, par Δ_1 le côté du premier polygone inscrit, par Δ_2 celui du second, etc., on aurait alors

$$\Delta_1 = \Delta \sin\frac{(n-2)\pi}{2n},\quad \Delta_2 = \Delta_1 \sin\frac{(n-2)\pi}{2n} = \Delta \sin^2\frac{(n-2)\pi}{2n},$$
$$\Delta_3 = \Delta \sin^3\frac{(n-2)\pi}{2n},\ldots,$$

et les apothèmes seraient respectivement

$$\frac{1}{2}\Delta \operatorname{tang}\frac{(n-2)\pi}{2n},\quad \frac{1}{2}\Delta \operatorname{tang}\frac{(n-2)\pi}{2n}\sin\frac{(n-2)\pi}{2n},$$
$$\frac{1}{2}\Delta \operatorname{tang}\frac{(n-2)\pi}{2n}\sin^2.\frac{(n-2)\pi}{2n},\ldots,$$

de manière qu'on aurait en général

$$P_p = \frac{1}{4} n \Delta^2 . \operatorname{tang}\frac{(n-2)\pi}{2n}\sin^{2p}.\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

(*) La solution de M. Prouhet, que nous donnerons, est, en effet, plus simple. Cela ne diminue pas le mérite de l'habile emploi que M. Tardy a fait de l'importante série hypergéométrique. Tm.

En substituant dans les formules connues

$$\sin nx = n \sin x \cos x \left[1 - \frac{n^2 - 2^2}{2.3} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{2.3.4.5} \sin^4 x - \ldots \right]$$

pour n pair, et

$$\cos nx = \cos x \left[1 - \frac{n^2 - 1^2}{2} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{2.3.4} \sin^4 x - \ldots \right]$$

pour n impair, et en prenant $x = \frac{(n-2)\pi}{2n}$, il est clair qu'il en résulterait les formules données par M. Prouhet.

GRAND CONCOURS DE 1852;

PAR M. BARJOU (JEAN),

Né le 30 octobre 1832, à Gontaud (Lot-et-Garonne), Élève du lycée Saint-Louis (Institution Barbet).

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES [PRIX (*)].

Étant donnés : 1° les distances FM $= r$, FM$' = r'$, FM$'' = r''$ *de trois points* M, M$'$, M$''$ *d'une conique au foyer* F *de cette courbe ; 2° les angles* MFA, M$'$FA, M$''$FA *qui déterminent les positions des rayons vecteurs* FM, FM$'$, FM$''$, *relativement à une droite fixe* FA, *menée par le foyer dans le plan de la courbe ;*

(*) C'est pour la *première* fois que, depuis l'établissement de l'Université, on n'a pas décerné de *premier* prix. On a *puni* les élèves de leur avoir donné une question banale, mal rédigée, et dont il semble que les auteurs n'aient pas connu toute la portée géométrique :

Quidquid delirant reges, plectuntur Achivi.

On demande :

1°. *De déterminer complétement la courbe, sa nature, sa situation et ses dimensions ;*

2°. *D'appliquer la solution aux données suivantes :*

$$r = 0{,}3098011, \quad \alpha = 16^\circ 58' 32'',3,$$
$$r' = 0{,}4094501, \quad \alpha' = 117^\circ 22' 40'',5,$$
$$r'' = 0{,}4373418, \quad \alpha'' = 222^\circ 12' 35''.$$

Lorsqu'on cherche l'équation d'une conique en coordonnées polaires, un foyer étant pris pour pôle et l'axe focal pour axe polaire, on trouve

$$(1) \qquad l = \frac{p}{1 - e \cos \omega}.$$

On sait que, lorsqu'on a pris pour pôle le foyer dont l'abscisse est $-c$, et qu'on a fait tourner le rayon vecteur en prenant la partie positive de l'axe des x pour point de départ, e est positif dans (1); e est, au contraire, négatif lorsque les angles étant comptés de la même manière, c'est l'autre foyer qui est pris pour pôle.

Cela posé, il est clair que l'équation de la conique cherchée rapportée au foyer F et à la ligne FA sera

$$l = \frac{p}{1 - e \cos(\omega + \zeta)},$$

ζ désignant l'angle inconnu, positif ou négatif, que fait FA avec l'axe focal. Les conditions du problème nous donnent les équations

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\alpha + \zeta)},$$

$$r' = \frac{p}{1 - e \cos(\alpha' + \zeta)},$$

$$r'' = \frac{p}{1 - e \cos(\alpha'' + \zeta)}.$$

Ces équations nous serviront à déterminer les trois in-

connues p, e et ζ. Le problème n'admettra généralement qu'un nombre limité de solutions.

Commençons par éliminer p et e, il vient

$$(2)\quad p=r-re\cos(\alpha+\zeta)=r'-r'e\cos(\alpha'+\zeta)=r''-r''e\cos(\alpha''+\zeta);$$

d'où

$$(3)\quad \begin{cases} e=\dfrac{r'-r}{r'\cos(\alpha'+\zeta)-r\cos(\alpha+\zeta)} \\ \quad=\dfrac{r''-r}{r''\cos(\alpha''+\zeta)-r\cos(\alpha+\zeta)}. \end{cases}$$

Chassant les dénominateurs dans la dernière égalité, on a

$$r''(r'-r)\cos(\alpha+\zeta)-r'(r''-r)\cos(\alpha'+\zeta)$$
$$+r(r''-r')\cos(\alpha+\zeta)=0.$$

Si l'on développe $\cos(\alpha''+\zeta)\ldots$, on voit que tous les termes contiendront, soit $\cos\zeta$, soit $\sin\zeta$, et pas d'autres lignes trigonométriques; divisant donc par $\cos\zeta$, il vient

$$r''(r'-r)(\cos\alpha''-\sin\alpha''\operatorname{tang}\zeta)$$
$$-r'(r''-r)(\cos\alpha'-\sin\alpha'\operatorname{tang}\zeta)$$
$$+r(r''-r')(\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tang}\zeta)=0;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\zeta=\frac{r''(r'-r)\cos\alpha''-r'(r''-r)\cos\alpha'+r(r''-r')\cos\alpha}{r''(r'-r)\sin\alpha''-r'(r''-r)\sin\alpha'+r(r''-r')\sin\alpha}.$$

Connaissant l'angle ζ, ou plutôt sa plus petite valeur, qui sera positive ou négative, d'après les signes de sa tangente, l'axe focal sera déterminé. Mais cela ne détermine pas la position de la courbe. Cependant ses dimensions sont faciles à calculer : l'équation (3) donnera e, et l'équation (2) donnera p.

Si, au lieu de considérer la plus petite valeur de ζ, on prenait $\zeta+180$, on voit que l'axe focal serait toujours le même; e changerait de signe, et p conserverait son ancienne valeur. Avec un peu d'attention, on se rend

compte de ce changement de signe de e. Cela tient, et à ce que nous avons dit au commencement sur le signe de e, et aussi à ce qu'en prenant $\zeta + 180$, au lieu de ζ, l'origine des angles est reportée 180 degrés plus loin.

Théoriquement, la question n'est pas encore complétement résolue; il faudrait connaître les conditions auxquelles les données doivent satisfaire pour que la conique soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Pour cela, il suffirait d'exprimer que le rapport focal est inférieur, supérieur ou égal à l'unité. On aurait aussi à chercher les conditions nécessaires pour que la courbe soit rapportée à tel foyer ou à tel autre. Ces recherches n'offriraient aucune difficulté, et elles ne peuvent être d'aucune utilité dans la pratique.

Discussion. Jusqu'à présent, nous avons supposé que les angles α, α', α'' étaient comptés dans un certain sens déterminé; mais on peut compter ces angles dans quatre sens différents, de là quatre positions de la courbe dans son plan. Dans la pratique, en astronomie par exemple, le sens dans lequel on compte les angles est parfaitement déterminé, ainsi que leur origine; il est le même que celui du mouvement de l'astre observé, alors il ne peut y avoir qu'une seule solution (*).

Il reste à discuter quelques cas particuliers :

Si l'on avait $r = r' = r''$, on aurait $\tang \zeta = \frac{0}{0}$; il y aurait véritablement indétermination, car la conique est un cercle ($e = 0$).

(*) Lorsqu'on assujettit les trois points à être sur la même branche, il n'y a qu'une solution; c'est ce qui a lieu en astronomie. Cette restriction n'existe pas en géométrie. Les trois points, pris deux à deux, peuvent se trouver sur une branche, et le troisième point sur la seconde branche, ce qui donne trois hyperboles; en tout quatre solutions. La première solution est une des trois coniques; et elle n'est astronomique que lorsque la courbe renferme le foyer. Tm

Si l'on avait $r = r'$, on aurait

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha'}{\sin\alpha - \sin\alpha'} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}} = -\,\text{tang}\,\frac{\alpha+\alpha'}{2}.$$

Ce résultat était facile à prévoir d'après la forme bien connue des courbes du deuxième degré.

Application. Nous avons trouvé

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{r''(r'-r)\cos\alpha'' - r'(r''-r)\cos\alpha' + r(r''-r')\cos\alpha}{r''(r'-r)\sin\alpha'' - r'(r''-r)\sin\alpha' + r(r''-r')\sin\alpha}.$$

Je laisserai tang ζ sous cette forme, parce que c'est celle qui exige le moins de logarithmes et le plus petit nombre d'opérations préliminaires. Je ne la rendrai pas calculable par logarithmes, parce que cette opération serait d'abord assez pénible, exigerait un nombre plus grand de logarithmes et donnerait moins d'exactitude.

On a

$$\text{tang}\,\zeta = \frac{-m+n+p}{-m'-n'+p'},$$

en mettant les signes en évidence pour la question présente.

Opérations préliminaires :

$$\pi - a' = 62^\circ 37' 19'',5,$$
$$\alpha'' - \pi = 42^\circ 12' 35'',$$
$$r' - r = 0{,}0996490, \quad r'' - r = 0{,}1275407,$$
$$r'' - r' = 0{,}0278917.$$

Calcul de m.	*Calcul de m'.*
$\log m = \log r'' + \log(r'-r) + \log\cos\alpha'' - 10$	
$\log r'' = \bar{1},6408210$	$\bar{1},6408210$
$\log(r'-r) = \bar{2},9984729$	$\bar{2},9984729$
$\log\cos\alpha'' = 9,8696368$	$\log\sin\alpha'' = 9,8272699$
$\log m = \bar{2},5089307$	$\log m' = \bar{2},4665638$

d'où

$$m = 0,0322798 \qquad m' = 0,029280$$

On voit que pour calculer m et m', il n'y a que six logarithmes à chercher; on doit avoir soin, lorsqu'on cherche $\cos\alpha''$, de prendre aussi $\sin\alpha''$. On ne trouve pas dans la Table l'angle α'', nous nous sommes servis de $\alpha''-\pi$, en tenant compte des signes. Au moyen des Tables de parties proportionnelles, on voit que l'on n'est sûr que des six premiers chiffres significatifs de la valeur de m ou de m'.

Calcul de n.

$$\log n = \log r' + \log(r''-r) + \log\cos\alpha' - 10$$

$$\begin{aligned}
\log r' &= \bar{1},6122010\\
\log(r''-r) &= \bar{1},1056489\\
\log\cos\alpha' &= 9,6626215\\
\hline
\log n &= \bar{2},3804714
\end{aligned}$$

donc

$$n = 0,0240144$$

Calcul de n'.

$$\log n' = \log r' + \log(r''-r) + \log\sin\alpha' - 10$$

$$\begin{aligned}
&\bar{1},6122010\\
&\bar{1},1056489\\
\log\sin\alpha' &= 9,9484099\\
\hline
\log n' &= \bar{2},6662598
\end{aligned}$$

$$n' = 0,046372$$

Calcul de p.

$$\log p = \log r + \log(r''-r') + \log\cos\alpha - 10$$

$$\begin{aligned}
\log r &= \bar{1},4910829\\
\log(r''-r') &= \bar{2},4454758\\
\log\cos\alpha &= 9,9806527\\
\hline
\log p &= \bar{3},9172106\\
p &= 0,0082644\\
-m+n+p &= 0,0000010
\end{aligned}$$

Calcul de p'.

$$\log p' = \log r + \log(r''-r') + \log\sin\alpha - 10$$

$$\begin{aligned}
&\bar{1},4910829\\
&\bar{2},4454750\\
\log\sin\alpha &= 9,4653308\\
\hline
\log p' &= \bar{3},4018887\\
p' &= 0,0025228\\
-m'-n'+p' &= -0,073129
\end{aligned}$$

On ne peut pas affirmer que l'angle ζ est nul, mais comme le numérateur est inférieur à l'erreur que l'on pouvait commettre (15), c'est-à-dire est très-petit, tandis

que le dénominateur est relativement très-considérable, ζ est négligeable; après cette omission, les valeurs de p et de e seront aussi exactes. Posons donc $\zeta = 0$, cela revient à dire que la droite FA est l'axe focal de la conique. Cela posé, on a

$$e = \frac{r' - r}{r' \cos \alpha' - r \cos \alpha} = - \frac{r' - r}{r' \cos (\pi - \alpha') + r \cos \alpha},$$

$$\log e = \log (r' - r) - \log (r' \cos \alpha' - r \cos \alpha);$$

or

$$r' \cos \alpha' = -0,18829, \quad r \cos \alpha = 0,29630,$$

$$-r' \cos \alpha' + r \cos \alpha = 0,48459,$$

donc

$$\begin{aligned} \log(-e) &= \log(r' - r) + \log 0,48459 \\ \log(r' - r) &= \bar{2},9984729 \\ + \log 0,48459 &= \bar{1},6853744 \\ \hline \log(-e) &= \bar{1},3130985 \end{aligned}$$

donc

$$e = -0,2056.$$

Je m'arrête ici au quatrième chiffre significatif de la valeur de e, parce que je ne suis pas sûr des autres chiffres. En effet, le nombre 0,48459 n'est connu qu'à moins d'une unité du dernier chiffre significatif; par suite, son logarithme peut être fautif de $90 + \frac{1}{2}$ unités du septième ordre décimal; le log $(-e)$ est donc entaché d'une erreur qui a pour limite $91 + \frac{1}{2}$ unités du septième ordre décimal (car l'erreur commise sur log $(r' - r)$ a pour limite une unité du septième ordre décimal). Donc, d'après une théorie que je n'expliquerai pas (*), l'erreur commise sur

(*) Voir *Usage des Tables de parties proportionnelles.*

e a pour limite $\frac{91 + \frac{1}{2}}{\Delta}$, Δ étant la différence tabulaire;

ici $\Delta = 213$, donc $E < \frac{91 + \frac{1}{2}}{213}$, $E < \frac{92}{213}$, $E < \frac{1}{2}$. Ainsi on pourrait prendre $- 0,20563$ qui serait entaché d'une erreur ayant pour limite $\frac{1}{2}$ unité du dernier chiffre significatif.

Quant au demi-paramètre, on le calculera facilement :

$$p = r - re \cos \alpha = r + r \cos \alpha \times 0,20563;$$

or

$$r \cos \alpha = 0,29630, \quad \log r \cos \alpha + \log (-e) = \bar{2},7848341;$$

donc

$$re \cos \alpha = + 0,060930,$$

à moins d'une unité du cinquième chiffre significatif; par suite,

$$p = 0,37073,$$

à moins d'une demi-unité du dernier chiffre. Nous voyons que e est < 1; *donc la courbe est une ellipse* ayant FA pour axe focal; *e est négatif, donc le point* F *est le foyer qui est placé par rapport au centre du même côté que l'origine des angles.* Il faudra donc connaître cette origine.

Note. Nous avons inséré cette solution (*), qu'on trouve partout, *uniquement* pour offrir un exercice de calcul aux élèves, et les engager à se servir de la méthode suivante de Gauss pour vérifier les résultats numériques.

En calculant le demi-grand axe par la formule $a = \frac{p}{1 - e^2}$, je trouve

$$a = 0,3870903.$$

(*) *Voir* page 306.

Dans la *Connaissance des Temps* pour 1848, dans un beau travail de M. Le Verrier sur Mercure, on lit (*Additions*, page 116) :

$$e = 0,2056003,$$
$$a = 0,3870984.$$

Ainsi le calcul de M. Barjou est exact pour e jusqu'à la quatrième décimale, et pour a jusqu'à la cinquième décimale. Je n'ai pas trouvé dans les Éphémérides de Mercure de 1846 à 1852, les époques des trois observations. Il serait facile de les découvrir d'après le mouvement connu de la planète.

Ce problème a été résolu la première fois par Halley (*Methodus directa et geometrica cujus ope investigatur aphelia, etc.*; *Transactions philosophiques*, 1676, n° 128); il emploie dans sa solution l'hyperbole. En effet, la position du second foyer se détermine par l'intersection de deux hyperboles uniconfocales et par l'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole uniconfocale, intersections qui s'opèrent par la voie géométrique; le foyer cherché a quatre positions différentes.

De la Hire a ramené le problème à la *directrice*, question de Géométrie élémentaire (*Sectiones conicæ*, lib. VIII, prop. XXV. Paris, 1685; in-fol.).

Newton cite cette solution et la donne légèrement modifiée (*Ph. nat. principia*, lib. I, prop. XXI, scholium; 1687).

Je ne sais qui le premier a mentionné les quatre solutions.

M. Comte les donne très-bien (*), et Cirodde moins bien. Les formules sont très-connues. Les savants auteurs de la question, calculateurs par état, n'attachant de l'importance qu'au calcul, n'ont eu en vue qu'un concours de *calculs;* soit. Alors, comme certains concurrents pouvaient connaître les formules et d'autres les ignorer et être obligés de les chercher, il fallait communiquer ces formules à tous pour les transformer en résultats numériques d'après les données de la question. Voilà ce qu'exigeait la justice. Sans cesse on prêche la morale aux jeunes gens; infiniment mieux vaudrait-il leur en donner sans cesse l'exemple. Or, la justice est une branche essentielle de la morale, et surtout de la morale publique : *res et non verba*.

(*) Comte, *Géométrie analytique*, page 274; 1843.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES DU GRAND CONCOURS DE 1852;

D'après M. GAUSS.

I.

$$(1) \qquad p \sin(A - P) = a,$$

$$(2) \qquad p \sin(B - P) = b;$$

a, b, A, B sont donnés, il s'agit de trouver p et P.

Ces deux équations peuvent être remplacées par celles-ci :

$$p \sin(B - A) \sin(H - P) = b \sin(H - A) - a \sin(H - B),$$

$$p \sin(B - A) \cos(H - P) = b \cos(H - A) - a \cos(H - B);$$

H est un angle quelconque.

Ces deux équations donnent la valeur de l'angle $H - P$, et celle de $p \sin(B - A)$, et par conséquent p et P sont connus.

Faisant, pour simplifier, $H = A$, on a

$$p \sin(A - P) = a,$$

$$p \cos(A - P) = \frac{b - a \cos(B - A)}{\sin(B - A)};$$

on a des équations analogues, en faisant $H = B$.

Si l'on fait

$$2H = A + B,$$

on obtient

$$p \sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{b + a}{2 \cos \frac{1}{2}(B - A)}.$$

$$p \cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{b - a}{2 \sin \frac{1}{2}(B - A)};$$

Si l'on pose $\frac{a}{b} = \text{tang}\,\zeta$, il vient

$$\text{tang}\left(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B} - \text{P}\right) = \text{tang}\,(45^\circ + \zeta)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(\text{B} - \text{A}),$$

ainsi on connaît P ; et l'on trouve p, par une des formules précédentes, où

$$\frac{1}{2}(b + a) = \sin\,(45^\circ + \zeta)\sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}}$$
$$= \frac{a \sin\,(45^\circ + \zeta)}{\sin\zeta.\sqrt{2}} = \frac{b \sin\,(45^\circ + \zeta)}{\cos\zeta.\sqrt{2}},$$
$$\frac{1}{2}(b - a) = \cos\,(45^\circ + \zeta)\sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}}$$
$$= \frac{a \cos(45^\circ + \zeta)}{\sin\zeta.\sqrt{2}} = \frac{b \cos(45^\circ + \zeta)}{\sin\zeta.\sqrt{2}};$$

on a encore

$$p \sin\,(\text{B} - \text{A}) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\,(\text{B} - \text{A})}.$$

II.

$$p \cos\,(\text{A} - \text{P}) = a,$$
$$p \cos\,(\text{B} - \text{P}) = b;$$

mêmes données; il s'agit de trouver p et P. On remplace ces équations par celles-ci :

$$p \sin(\text{B} - \text{A}) \sin(\text{H} - \text{P}) = - b \cos(\text{H} - \text{A}) + a \cos(\text{H} - \text{B}),$$
$$p \sin(\text{B} - \text{A}) \cos(\text{H} - \text{P}) = b \sin(\text{H} - \text{A}) - a \sin(\text{H} - \text{B});$$

le reste comme ci-dessus.

(Gauss, *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 82; 1809.)

III.

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 + e \cos(\text{N} - \text{P}), \\ \frac{p}{r'} &= 1 + e \cos(\text{N}' - \text{P}), \\ \frac{p}{r''} &= 1 + e \cos(\text{N}'' - \text{P}). \end{aligned} \right.$$

r, r', r''; N, N', N'' données; ce sont celles du problème.

Multipliant la première équation par $\sin(N''-N')$, la seconde par $-\sin(N''-N)$, et la troisième par $\sin(N'-N)$, et ajoutant, on a

$$p = \frac{\sin(N''-N') - \sin(N''-N) + \sin(N'-N)}{\frac{1}{r}\sin(N''-N') - \frac{1}{r'}\sin(N''-N) + \frac{1}{r''}\sin(N'-N)}$$

$$= \frac{R\,r'\,r''\,r'''}{Q},$$

$$R = 4\sin\frac{1}{2}(N''-N')\sin\frac{1}{2}(N''-N)\sin\frac{1}{2}(N'-N),$$

$$Q = r'r''\sin(N''-N') - rr''\sin(N''-N) + rr'\sin(N'-N)$$
$$= n - n' + n'';$$

$n - n' + n''$ est le double de l'aire du triangle qui a pour sommets les extrémités des rayons vecteurs r, r', r''; si cette aire est petite, p devient grand, et de légères erreurs d'observations amènent de grandes erreurs dans le calcul de p; connaissant p, on trouve e, et ensuite P par la méthode du § II, en combinant deux quelconques des équations données.

On peut aussi trouver P directement, de cette manière: retranchant la troisième des équations (1) de la seconde, la troisième de la première, la seconde de la première, on obtient

$$\frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(N''-N')} = \frac{e}{p}\sin\left(\frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N'' - P\right),$$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(N''-N)} = \frac{e}{p}\sin\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - P\right),$$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{2\sin\frac{1}{2}(N'-N)} = \frac{e}{p}\sin\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - P\right):$$

deux quelconques de ces équations, à l'aide du § I, donnent les valeurs de P et de $\frac{e}{p}$; et ensuite une quelconque des équations (1) donne les valeurs de e et de p.

Combinant la première équation avec la troisième, et posant

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\frac{r'}{r} - 1 \, . \sin\frac{1}{2}(N'' - N')}{1 - \frac{r'}{r''}\cdot\sin\frac{1}{2}(N' - N)},$$

on a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{4}N'' - P\right) = \operatorname{tang}(45^\circ + \zeta)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(N'' - N);$$

P étant connu, on a

$$p = \frac{rr'[\cos(N - P) - \cos(N' - P)]}{r\cos(N - P) - r'\cos(N' - P)},$$

$$e = \frac{r' - r}{r\cos(N - P) - r'\cos(N' - P)}.$$

Pour adapter ces formules au calcul logarithmique, on écrit l'identité

$$\begin{aligned} r\cos(N - P) - r'\cos(N' - P) &= [r\cos(N - H) - r'\cos(N' - H)]\cos(H - P) \\ &- [r\sin(N - H) - r'\sin(N' - H)]\sin(H - P), \end{aligned}$$

où H est arbitraire.

Posant

$$r\cos(N - H) - r'\cos(N' - H) = a\cos(A - H),$$
$$r\sin(N - H) - r'\sin(N' - H) = a\sin(A - H),$$

équations qui déterminent a et A; ensuite

$$p = \frac{2rr'\sin\frac{1}{2}(N' - N)\sin\left[\frac{1}{2}(N' + N) - P\right]}{a\cos(A - P)},$$

$$e = \frac{r' - r}{a\cos(A - P)}.$$

Si l'on prend

$$H = \frac{1}{2}(N + N'),$$

l'angle A est donné par l'équation

$$\text{tang}\left(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N'\right) = \frac{r' + r}{r' - r}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(N' - N),$$

et l'on a de suite

$$e = -\frac{\cos\left(A - \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N'\right)}{\cos\frac{1}{2}(N' - N)\cos(A - P)}.$$

(Gauss, *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 86.)

QUESTIONS.

257. Réduire à des quadratures simples la valeur de l'intégrale triple

$$\int\int\int e^{-(x^2+y^2+z^2)} x^p y^q z^r\, dx\, dy\, dz,$$

où les limites des variables se déterminent d'après l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{z^2} \leqq 1.$$

258. Étant données deux surfaces du second ordre, concentriques et de mêmes axes, qui s'entre-coupent, trouver l'aire du cône, ayant le centre pour sommet et la courbe de l'intersection pour base.

259. Exprimer, par des intégrales abéliennes, la longueur d'un arc de la courbe de l'intersection.

260. Trouver l'équation de la courbe, laquelle coupe, sous un angle constant, toutes les génératrices d'un cône du second degré.

261. Trouver l'équation de la courbe, laquelle coupe, sous un angle constant, toutes les lignes géodésiques sur une surface développable, issues d'un point fixe sur la surface. (Strebor.)

LIEU DES SOMMETS DES CONES DROITS CIRCONSCRITS A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

On doit à M. Steiner ce théorème remarquable : *Les sommets des cônes droits circonscrits à un ellipsoïde sont sur une hyperbole.* Je vais le démontrer au moyen d'un procédé de transformation analogue à celui dont j'ai déjà fait usage au sujet du lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle variable (page 62 de ce volume).

1. *Lemme.* $C = 0$ étant l'équation d'une surface conique du second ordre, et $P = lx + my + nz + k = 0$ celle du plan de la courbe de contact d'une surface du même ordre inscrite, l'équation de cette nouvelle surface est nécessairement de la forme $C + \gamma P^2 = 0$, où γ désigne un paramètre.

Car cette équation devant être vérifiée, en faisant à la fois $C = 0$, $P = 0$, doit pouvoir être mise sous la forme $C + PQ = 0$, Q étant du premier degré en x, y, z. Si l'on exprime ensuite que le plan tangent à cette surface, suivant la ligne de contact $P = 0$, coïncide avec le plan tangent à la surface conique, il vient la triple équation

$$\frac{\frac{dC}{dx}}{\frac{dC}{dx} + Q\frac{dP}{dx}} = \frac{\frac{dC}{dy}}{\frac{dC}{dy} + Q\frac{dP}{dy}} = \frac{\frac{dC}{dz}}{\frac{dC}{dz} + Q\frac{dP}{dz}};$$

d'où résulte la double égalité

$$Q\left(\frac{dC}{dx}\frac{dP}{dz} - \frac{dC}{dz}\frac{dP}{dx}\right) = 0, \quad Q\left(\frac{dC}{dy}\frac{dP}{dz} - \frac{dC}{dz}\frac{dP}{dy}\right) = 0.$$

Si Q n'était pas nul en même temps que P, les facteurs entre parenthèses seraient nuls, et, en faisant attention que $\frac{dP}{dx} = l$, $\frac{dP}{dy} = m$, $\frac{dP}{dz} = n$, on en tirerait

$$\frac{dC}{dx} = \frac{l}{n}\frac{dC}{dz}, \quad \frac{dC}{dy} = \frac{m}{n}\frac{dC}{dz},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2} = \frac{1}{n}\frac{dC}{dz}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{dC}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\frac{\frac{dC}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\frac{\frac{dC}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2}} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

La normale à la surface conique coïnciderait donc, dans toute l'étendue de la courbe de contact, avec la normale au plan de cette courbe, ce qui ne saurait être admis. On a donc $Q = 0$ en même temps que $P = 0$, c'est-à-dire $Q = \gamma P$. C. Q. F. D.

2. *Lemme*. Lorsque deux surfaces du second ordre sont inscrites dans une même surface conique, aussi du second ordre, leur intersection est une courbe plane, ou plutôt un système de deux courbes planes. Soient, en effet, $C = 0$, $P = 0$, $P' = 0$ les équations de la surface conique et des deux plans de contact; les équations des

deux surfaces seront, d'après le lemme qui précède,

$$C + \gamma P^2 = 0, \quad C + \gamma' P'^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$P\sqrt{\gamma} \pm P'\sqrt{\gamma'} = 0,$$

équation de deux plans.

3. *Réciproquement, pour que deux surfaces du second ordre puissent être considérées comme inscriptibles dans un même cône, il faut et il suffit que ces surfaces se coupent suivant une courbe plane.*

Tout se réduit à faire voir que l'une des deux surfaces peut être considérée comme une transformée *homologique* de l'autre. Soient

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gzx + hxy$$
$$+ a'x + b'y + c'z + u_0 = 0$$

l'équation de la première, et

$$s = 0$$

celle du plan que, d'après le lemme ci-dessus, elle a en commun avec la seconde; l'équation de cette dernière sera de la forme

$$u + st = 0.$$

Cela posé, je fais, dans $u = 0$,

$$\frac{x - \xi}{x' - \xi} = \frac{y - \eta}{y' - \eta} = \frac{z - \zeta}{z' - \zeta} = \frac{1}{1 + s'\lambda},$$

s' étant s dans lequel on a remplacé x, y, z par x', y', z'. $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ sont des paramètres dont je disposerai, de telle sorte que la transformée en x', y', z', obtenue de $u = 0$, devienne identique avec $u + st = 0$. Il est bien évident que, par cette transformation, la nouvelle surface se trouvera inscrite avec la première $u = 0$ dans une même surface conique, ayant son sommet au point ξ, η, ζ, de

sorte que, si l'identité peut s'établir généralement, le théorème sera démontré.

Appelant, pour abréger, υ le résultat de la substitution de ξ, η, ζ, au lieu de x, y, z, dans u, et effaçant les accents des nouvelles coordonnées, il vient, pour l'équation de la transformée,

$$u + s\lambda\left[\left(x\frac{d\upsilon}{d\xi}+y\frac{d\upsilon}{d\eta}+z\frac{d\upsilon}{d\zeta}\right)+(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)+2u_0\right]+s^2\lambda^2\upsilon=0$$

Pour la rendre identique avec $u+st=0$, il suffit d'identifier le polynôme $t=lx+my+nz+k$ avec

$$\lambda\left[\left(x\frac{d\upsilon}{d\xi}+y\frac{d\upsilon}{d\eta}+z\frac{d\upsilon}{d\zeta}\right)+(a'\xi+b'\eta+c'\zeta)+2u_0\right]+s\lambda^2\upsilon.$$

Mettant s sous la forme explicite $\frac{x}{q}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=\sigma$, et égalant entre eux les coefficients des variables x, y, z, ainsi que les quantités constantes, on a les équations

$$\lambda\frac{d\upsilon}{d\xi}+\lambda^2\frac{\upsilon}{p}=l,\quad \lambda\frac{d\upsilon}{d\eta}+\lambda^2\frac{\upsilon}{q}=m,$$

$$\lambda\frac{d\upsilon}{d\zeta}+\lambda^2\frac{\upsilon}{r}=n,\quad \lambda(a'\xi+b'\eta+c'\zeta+2u_0)-\lambda^2\upsilon\sigma=k;$$

leur nombre est égal à celui des inconnues, et par conséquent le problème est, en général, déterminé.

Si l'on tire de la dernière de ces équations

$$\lambda^2\upsilon=\frac{1}{\sigma}[\lambda(a'\xi+b'\eta+c'\zeta+2u_0)-k],$$

et qu'on substitue cette expression de $\lambda^2\upsilon$ dans les trois premières, λ pourra en être ensuite éliminé, en les divisant membre à membre, et il restera deux équations du premier degré en ξ, η, ζ, c'est-à-dire l'équation d'une ligne droite passant par les sommets des cônes cherchés. D'un autre côté, l'élimination de λ, dirigée convenable-

ment, fournit trois équations du second ordre en ξ, η, ζ; par conséquent, il n'y a que deux solutions, puisqu'elles sont données par les intersections d'une droite et d'une surface du second ordre.

Observation. Les propositions qui précèdent ne sont pas nouvelles; cependant j'ai cru devoir les démontrer ici, afin d'éviter au lecteur la peine de les chercher dans les ouvrages où elles se trouvent.

4. Il est maintenant bien facile de démontrer le théorème de M. Steiner. Si un cône droit est circonscrit à une surface du second ordre, toute sphère inscrite coupe cette surface suivant une courbe plane, et, par conséquent, suivant une de ses sections circulaires. On en conclut que les sommets de tous les cônes droits sont situés dans un plan passant par le centre, et renfermant les quatre ombilics ou points sphériques de la surface. Supposons, pour fixer les idées, que celle-ci ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et faisons

$$\frac{x-\xi}{x'-\xi}=\frac{y-\eta}{y'-\eta}=\frac{z-\zeta}{z'-\zeta}=\frac{1}{s'\lambda+1},$$

s' étant de la forme indiquée ci-dessus. Nous pouvons, pour tenir compte de ce qui vient d'être dit, et en admettant que les ombilics sont dans le plan des xz, écrire

$$\eta=0 \quad \text{et} \quad q=\frac{1}{0}.$$

Cela posé, on obtient, pour la surface transformée, l'équation

$$\frac{y'^2}{b^2}+\mathrm{A}x'^2+\mathrm{B}x'z'+\mathrm{C}z'^2+\mathrm{D}x'+\mathrm{E}z'+\mathrm{F}=0,$$

dans laquelle

$$A = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\xi}{a^2 p} + \frac{1}{a^2},$$

$$C = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\zeta}{c^2 p} + \frac{1}{c^2},$$

$$B = \frac{2\lambda}{pr}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right) + \frac{p\xi}{a^2} + \frac{p\zeta}{c^2}\right].$$

Pour que la transformée soit une sphère, il faut écrire

$$A = C = \frac{1}{b^2} \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Tirant λ de la dernière de ces équations, et le substituant dans $A = C$, on obtient

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{r^2}{c^2}\right)} - \frac{\zeta^2}{\left(\frac{p^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2 - c^2}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{r^2}{c^2}},$$

équation d'une hyperbole ayant pour foyers ceux de la section ombilicale de l'ellipsoïde. On devait s'attendre à ce résultat, d'après la forme des coefficients A, B, C, lesquels sont composés de la même manière que ceux de la page 63. Mais il faut encore avoir égard à la relation

$$A = \frac{1}{b^2}, \quad \text{ou} \quad C = \frac{1}{b^2},$$

et l'on trouve sans peine que les nouvelles équations ainsi obtenues entre ξ et ζ deviennent identiques avec celle qui précède, si l'on prend

$$\frac{r^2}{p^2} = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

C'est la relation qu'il faut établir entre r et p pour déter-

miner les sections circulaires de l'ellipsoïde. Le théorème de M. Steiner est donc complétement démontré, et l'équation du lieu des sommets des cônes droits circonscrits à l'ellipsoïde prend finalement la forme

$$\frac{\xi^2}{a^2-b^2}-\frac{\zeta^2}{b^2-c^2}=1.$$

Observation. Les relations d'où ce résultat a été déduit sont indépendantes de σ; par conséquent, si l'on conçoit une sphère variable ayant en commun avec un ellipsoïde une section circulaire, cette sphère pourra être regardée comme inscrite dans un cône droit tangent à l'ellipsoïde, et le lieu des sommets de ce cône sera une hyperbole ayant pour foyers ceux de la section ombilicale de l'ellipsoïde. Énoncé tout à fait semblable à celui du théorème de M. Chasles (tome X, page 408).

THÉORÈMES SUR L'INTERSECTION D'UNE CONIQUE ET D'UNE CIRCONFÉRENCE;

PAR M. DE PISTORIS,
Capitaine au 5e d'artillerie.

---

1. Théorème. *Une section conique étant rencontrée en quatre points, par tant de circonférences de cercle qu'on voudra, ayant leurs centres sur une même parallèle aux directrices, la somme algébrique des distances de ces quatre points à un même foyer est une quantité constante, quelle que soit la parallèle que l'on considère.*

2. Théorème. *Si une circonférence de rayon constant et passant par le foyer d'une section conique, la ren-*

contre en quatre points, le produit des rayons vecteurs aboutissant à ces points est constant.

3. Théorème. *Une circonférence passant par le foyer d'une parabole, la somme des carrés des rayons vecteurs menés aux points d'intersection est constante pour toutes les circonférences dont les centres sont sur une même parallèle à la directrice; il en est de même quand la circonférence passe par le sommet.*

4. Théorème. *Une circonférence rencontrant une hyperbole équilatère, la somme des carrés des distances des points d'intersection au centre de l'hyperbole est égale au carré du diamètre de la circonférence.*

5. Théorème. *Une circonférence de rayon* donné *coupant une hyperbole équilatère, la somme des carrés des distances des points d'intersection, soit à un même foyer, soit à un même sommet, est constante pour toutes les circonférences qui ont leurs centres sur la même parallèle aux directrices.*

SUR LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE FONCTIONS. SÉRIES DE BURMANN, DE LAGRANGE, DE WRONSKI;

Par M. A.,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

§ II.

Dans le paragraphe précédent (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 119), nous avons montré que si l'on a $z = F(y)$, $y = \varphi(x)$, on trouve, en désignant pour

abréger $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ par θ,

$$\frac{d^n z}{dx^n}=\frac{n}{1}\frac{dz}{dy}\frac{d^{n-1}(\theta)_0}{dh^{n-1}}+\frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2 z}{dy^2}\frac{d^{n-2}(\theta^2)_0}{dh^{n-2}}+\ldots\ (*),$$

équation qui peut s'écrire sous la forme

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^n z}{dx^n}&=(\theta^n)_0\frac{d^n z}{dy^n}+\frac{n}{1}\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\\&+\frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^{n-2}}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant qu'on ait $z=\mathrm{F}(x)$ et $y=\varphi(x)$; cherchons $\frac{d^n z}{dy^n}$. Il est évident que z et y étant des fonctions de x, on pourra regarder z comme une fonction implicite de y, et alors on aura, d'après l'équation (1),

$$\frac{d^n z}{dx^n}=(\theta^n)_0\frac{d^n z}{dy^n}+\frac{n}{1}\frac{d(\theta^{n-1})_0}{dh}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$$
$$+\frac{n.n-1}{1.2}\frac{d^2(\theta^{n-2})_0}{dh^2}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=(\theta^{n-1})_0\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}+\frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{n-2})_0}{dh}\frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}}+\ldots,$$

. . . .

$$\frac{d^{n-m}z}{dx^{n-m}}=(\theta^{n-m})_0\frac{d^{n-m}z}{dy^{n-m}}+\frac{n-m}{1}\frac{d(\theta^{n-m-1})_0}{dh}\frac{d^{n-m-1}z}{dy^{n-m-1}}+\ldots,$$

. . . .

$$\frac{d^2 z}{dx^2}=(\theta^2)_0\frac{d^2 z}{dy^2}+\frac{2}{1}\frac{d(\theta)_0}{dh}\frac{dz}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx}=(\theta)_0\frac{dz}{dy}.$$

Multiplions ces équations, en commençant par la première, respectivement par

$$(\theta^{-n})_0,\quad\frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh},\quad\frac{n-1.n-2}{1.2}\frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2},\ldots,\ \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},$$

(*) Le *zéro* indique qu'il faut faire $h=0$, après les différentiations.

et faisant la somme, je dis qu'on aura

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n z}{dy^n} &= (\theta^{-n})_0 \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{n-1}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} \\ &+ \frac{n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Pour le prouver, dans la somme des produits ci-dessus, prenant le coefficient du terme multiplié par $\frac{d^{n-m} z}{dy^{n-m}}$, que nous désignerons par $\frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+1}{1 \,.\, 2 \; 3 \ldots m-1} \cdot \text{C}$, on aura, en mettant $\frac{n-1 \,.\, n-2 \ldots n-m+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m-1}$ en facteur commun,

$$\begin{aligned} \text{C} &= n(\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + (n-1) \cdot \frac{m}{1} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \ldots \\ &+ (n-m+1) \cdot \frac{m}{1} \frac{d^{m-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{m-1}} \frac{d(\theta^{n-m})_0}{dh} \\ &+ n-m \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0. \end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \text{C} = n &\left[\begin{aligned} (\theta^{-n})_0 \frac{d^m(\theta^{n-m})_0}{dh^m} + \frac{m}{1} \cdot \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} \\ + \ldots + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \end{aligned} \right] \\ - m &\left[\begin{aligned} \frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} \frac{d^{m-1}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-1}} + \frac{m-1}{1} \frac{d^2(\theta^{-n})_0}{dh^2} \cdot \frac{d^{m-2}(\theta^{n-m})_0}{dh^{m-2}} + \ldots \\ + \frac{d^m(\theta^{-n})_0}{dh^m} (\theta^{n-m})_0 \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Or la quantité comprise entre les premières parenthèses n'est autre chose que le développement de

$$\frac{d^m(\theta^{-n} \,.\, \theta^{n-m})_0}{dh^m} = \frac{d^m(\theta^{-m})_0}{dh^m}.$$

De même, la quantité comprise entre les secondes parenthèses, est le développement de

$$\frac{d^{m-1}\left[\frac{d\,(\theta^{-n})}{dh}\cdot\theta^{n-m}\right]_0}{dh^{m-1}} = -\,n\,\frac{d^{m-1}\left(\theta^{-m-1}\,\frac{d\theta}{dh}\right)_0}{dh^{m-1}}$$

$$= \frac{n}{m}\,\frac{d^m\,(\theta^{-m})_0}{dh^m}.$$

On a donc

$$C = n\left[\frac{d^m\,(\theta^{-m})_0}{dh^m} - \frac{d^m\,(\theta^{-m})_0}{dh^m}\right] = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

L'équation (2) peut se mettre sous une forme plus concise. En effet, on a en général

$$\frac{d^m\,F(x)}{dx^m} = \frac{d^m\,F(x+h)_0}{dh^m}.$$

Si donc on pose

$$z = F(x),$$

on aura

$$(3)\qquad \frac{d^n\,F(x)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left[\theta^{-n}\,F'(x+h)\right]_0.$$

L'équation (3) donne une démonstration très-simple et très-directe de la série de Burmann.

En effet, soit x une fonction de y donnée par l'équation

$$y = \varphi(x).$$

Concevons qu'on ait tiré de cette équation x en fonction de y, et que dans la fonction $F(x)$ on ait remplacé x par sa valeur en y. Alors si $F(x)$ devient une fonction continue de y, on pourra développer, par le théorème de Taylor, $F(x)$ suivant les puissances de y, et l'on aura un développement de la forme

$$F(x) = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots.$$

Pour déterminer A_n, différentions n fois cette série, et

faisons ensuite $y = 0$, on aura

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n F(x)}{dy^n},$$

en ayant soin de faire $y = 0$, après les différentiations. Mais, d'après l'équation (3), on a

$$\frac{d^n F(x)}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} [\theta^{-n} F'(x+h)]_0.$$

Par suite, si l'on désigne par a la valeur de x qui correspond à $y = 0$, on aura

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left\{ \left[\frac{\varphi(a+h)}{h} \right]^{-n} F'(a+h) \right\}_0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} \right]^n F'(x) \right\}_{(x=a)}.$$

Nous ne nous occuperons pas ici de savoir quelles sont les conditions sous lesquelles cette série de Burmann peut exister. Ce sera l'objet d'un autre article. Nous avons seulement voulu faire voir avec quelle facilité l'équation (3) permettait de déterminer les coefficients de cette série.

Si l'on fait $\varphi x = \frac{x-a}{\psi(x)}$ dans l'équation (4), alors

$$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\psi(a)^n F'(a)].$$

On a donc ce théorème trouvé par Lagrange :

Si l'on a l'équation $x = a + y\psi(x)$, *l'expression d'une fonction* $F(x)$ *d'une racine de cette équation sera donnée par la série suivante :*

$$F(x) = F(a) + [\psi(a) F'(a)] y + \frac{d}{da} [\psi(a)^2 F'(a)] \frac{y^2}{1.2} + \ldots.$$

Si dans l'équation (2) nous faisons successivement

$z = y, y^2, \ldots, y^n$, on aura les identités suivantes, en désignant, pour abréger, $\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$ par $D^n\varphi(x)$,

$$(A)\left\{\begin{aligned}
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x) + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh} D^{n-1}\varphi(x) + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x), \\
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^2 + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.\varphi(x)^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^{n-1} + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.\varphi(x)^{n-1} + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^{n-1}, \\
1.2.3\ldots n &= (\theta^{-n})_0 D^n.\varphi(x)^n + \frac{n-1}{1}\cdot\frac{d(\theta^{-n})_0}{dh}.D^{n-1}.\varphi(x)^n + \ldots \\
&\quad + \frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}} D.\varphi(x)^n.
\end{aligned}\right.$$

Ces identités nous montrent que si l'on a les équations

$$\begin{aligned}
&D.\varphi(x).y_1 + D^2.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D.\varphi(x)^n.y_n = DF(x), \\
&D^2.\varphi(x).y_1 + D^2.\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^2.\varphi(x)^n.y_n = D^2F(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&D^{n-1}\varphi(x).y_1 + D^{n-1}\varphi(x)^2.y_2 + \ldots + D^{n-1}\varphi(x)^n.y_n = D^{n-1}F(x), \\
&D^n\varphi(x).y_1 + D^n\varphi(x)^2 y^2 + \ldots + D^n\varphi(x)^n.y_n = D^nF(x),
\end{aligned}$$

on trouvera, en les multipliant respectivement par

$$\frac{d^{n-1}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-1}},\ \frac{n-1}{1}\ \frac{d^{n-2}(\theta^{-n})_0}{dh^{n-2}}, \ldots (\theta^{-n})_0,$$

$$\begin{aligned}
1.2.3\ldots ny_n &= (\theta^{-n})_0 D^nF(x) + \frac{n-1}{1}\frac{d(\theta^{-n})}{dh}.D^{n-1}F(x) + \ldots \\
&= \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}.F'(x+h)]_0.
\end{aligned}$$

Mais si l'on résout les équations (A) à la manière ordinaire, on aura

$$y_n = \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}.D^n F(x)]}{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}.D^n\varphi(x)^n]},$$

les déterminants du numérateur et du dénominateur étant formés par rapport aux indices de différentiation.

En égalant ces deux valeurs de y_n, on aura

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\dfrac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\cdot[\theta^{-n}.F'(x+h)]_0}{1.2.3\ldots n} \\ &= \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n F(x)]}{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n\varphi(x)]^n}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on développe les deux membres de cette équation suivant les dérivées de F (x), à cause de l'indétermination de cette fonction, les coefficients de chacune de ces dérivées devront être identiques. On aura donc, en égalant les coefficients de $D^n F(x)$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}(\theta^{-n})_0 = \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}]}{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n\varphi(x)^n]}.$$

On tirera de là

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^n\varphi(x)^n] \\ &= 1!2!\ldots n!\left(\theta^{-\frac{n.n+1}{2}}\right)_0 = 1!2!\ldots n![D\varphi(x)]^{\frac{n.n+1}{2}}, \end{aligned}\right.$$

et, par suite, l'équation (α) deviendra

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}[\theta^{-n}F'(x+h)] \\ &= \frac{S[\pm D^1\varphi(x).D^2\varphi(x)^2\ldots D^{n-1}\varphi(x)^{n-1}.D^n F(x)]}{1!2!3!\ldots n![D\varphi(x)]^{\frac{n.n+1}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Ce beau théorème ainsi que l'équation (β) sont dus à M. Wronski (*).

M. Prouhet a donné une belle démonstration de l'équation (β) fondée sur des considérations autres que celles dont nous nous sommes servi.

RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A COEFFICIENTS TRIGONOMÉTRIQUES;

D'APRÈS M. CRELLE.

(Journal de M. Crelle, t. XLIII, p. 37; 1852.)

---

1. *Lemme.* Si $m\varphi = \pi$, on a

(1) $$\sum_1^{m-1} \sin p\varepsilon\varphi \sin p\mu\varphi = 0,$$

(2) $$\sum_1^{m-1} \sin^2 p\mu\varphi = \frac{1}{2} m;$$

ε et μ sont des nombres entiers, et les indices sont relatifs à p.

Démonstration. Voir LECOINTE, tome III, page 526; dans l'endroit cité, lorsque $\theta = \varphi$ l'expression de la somme se réduit à $\frac{0}{0}$; on en trouve la valeur par la méthode connue et l'on parvient ainsi à l'équation (2).

(*) *Philosophie de la Technie* (2e sect., p. 110). Il y a peut-être encore d'autres beaux théorèmes. On rendrait service en les traduisant en langage vulgaire, et débarrassés de ces formes insolites, de ces locutions figurées, métaphysiques, mystiques, capables d'*enténébrer* la plus lucide des sciences. TM.

2. Soient les $m-1$ équations

$$y_1 \sin\varphi + y_2 \sin 2\varphi + y_3 \sin 3\varphi + \ldots + y_{m-1} \sin(m-1)\varphi = s_1,$$
$$y_1 \sin 2\varphi + y_2 \sin 4\varphi + y_3 \sin 6\varphi + \ldots + y_{m-1} \sin 2(m-1)\varphi = s_2,$$
$$y_1 \sin 3\varphi + y_2 \sin 6\varphi + y_3 \sin 9\varphi + \ldots + y_{m-1} \sin 3(m-1)\varphi = s_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1 \sin(m-1)\varphi + y_2 \sin 2(m-1)\varphi + y_3 \sin 3(m-1)\varphi + \ldots + y_{m-1} \sin(m-1)^2\varphi = s_{m-1},$$

où $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ sont $m-1$ inconnues; $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ sont $m-1$ quantités connues, ainsi que m; et $\mu\varphi = \pi$.

Multiplions la première équation par $\sin\mu\varphi$, la deuxième équation par $\sin 2\mu\varphi$, etc., et la dernière équation par $\sin(m-1)\mu\varphi$; μ est un nombre quelconque compris entre o et m.

Les séries qui multiplient $y_1, y_2, \ldots, y_{\mu-1}, y_{\mu+1}, \ldots, y_{m-1}$ sont nulles en vertu de l'équation (1), et la série qui multiplie y_μ se réduit à $\frac{1}{2}m$, d'après l'équation (2); donc

$$my_\mu = 2[s_1 \sin\mu\varphi + s_2 \sin 2\mu\varphi + \ldots + s_{m-1} \sin(m-1)\mu\varphi];$$

faisant successivement μ égal à 1, 2, 3,..., $m-1$, on obtient les valeurs des $m-1$ inconnues.

Observation. Ces équations sont celles que Lagrange résout dans sa *Théorie du son* (Mémoires de l'Académie de Turin, tome I; 1769); il parvient au même résultat par une voie plus longue. Du reste, les équations (1) et (2) sont aussi dues à Lagrange.

MÉLANGES.

1. M. Seguin, élève du collége de Toulon (classe de M. Huet), résout les questions suivantes :

1°. Inscrire dans une sphère un cône droit, tel que sa surface totale, augmentée de sa surface latérale, soit égale à la surface de la sphère. En prenant la hauteur du cône pour inconnue, on parvient à une équation du quatrième degré, carré parfait, et, par conséquent, à une équation du deuxième degré.

2°. Les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle coupent respectivement les côtés opposés en trois points, qui sont en ligne droite. Démonstration par les propriétés segmentaires connues (*).

3°. *Première question élémentaire du grand concours* (page 306). On voit facilement que les points O et C appartiennent au lieu cherché. Désignant par I le point où la perpendiculaire DF rencontre la circonférence décrite sur GH comme diamètre, on démontre que $\overline{FI}^2 = GF.FO$; donc le lieu du point I est un cercle. Les propriétés segmentaires donnent le lieu immédiatement.

4°. *Seconde question élémentaire du grand concours*. M. Seguin dit que le théorème s'applique à un point quelconque situé sur le plan de la base. Observation juste, faite par un élève ! L'énoncé *officiel* est tronqué.

5°. On démontre les deux propriétés fondamentales

(*) On a trois faisceaux harmoniques, et trois des rayons homologues passent par le même point.

des diamètres conjugués (Apollonius) dans l'ellipse, en considérant cette courbe comme la projection orthogonale d'un cercle, ayant l'axe focal pour diamètre; cercle qu'on rabat sur le plan de l'ellipse. M. Barthe, élève de l'institution Barbet, démontre ces propriétés, dans l'hyperbole, de la même manière; il considère cette courbe comme étant la projection orthogonale d'une hyperbole équilatère, construite sur l'axe focal, et rabattue sur le plan de l'hyperbole.

2. *Lieu géométrique plan*. Soient deux axes fixes situés dans un plan; un cercle d'un rayon *donné* coupe ces axes en quatre points, sommets d'un quadrilatère; les deux diagonales sont assujetties à se couper à angles droits. M. le professeur Houssel trouve que le lieu du centre du cercle est une ellipse. On trouve la même ellipse en assujettissant à la même condition les côtés opposés du quadrilatère.

3. L'intégrale définie, traitée par M. Loxhay (page 146), est un cas particulier d'une autre intégrale définie du même genre (voir *Journal de Mathématiques*, tome XI, page 471; 1846).

4. Pour construire l'intersection d'un cône avec un plan, M. Soubrut, élève du lycée de Montpellier, emploie la méthode suivante : On cherche l'angle que fait le plan sécant avec le plan horizontal; on prend pour plan *auxiliaire* un plan vertical, donné par sa trace horizontale perpendiculaire à la trace horizontale du plan sécant. Après avoir projeté orthogonalement toutes les génératrices du cône sur ce plan, on rabat ce plan sur le plan horizontal, et l'on obtient facilement le rabattement de la section cherchée; puis, à l'aide de cette courbe, on construit les projections horizontale et verticale de la section. La même méthode s'applique encore avec plus de facilité au cylindre, surtout pour obtenir la section

droite. Pour construire l'intersection de deux cylindres, le même élève ne fait usage que du plan horizontal; les données sont : 1° les traces horizontales des cylindres; 2° les projections horizontales des génératrices; 3° les inclinaisons des génératrices. On cherche la trace horizontale d'un plan *auxiliaire* parallèle aux génératrices; on obtient ensuite la projection horizontale de l'intersection des deux cylindres, et la distance de chaque point de cette intersection à un plan perpendiculaire à une génératrice; ce qui permet de développer le cylindre.

5. Cette année, comme à l'ordinaire, on a partagé, à Paris, les candidats à l'École Polytechnique en deux sections; et, à chacune, on a donné à résoudre un problème de géométrie descriptive : à une section, on a donné un problème facile, de prompte exécution; et à l'autre, un problème comparativement difficile, et d'une exécution longue. L'énoncé de ce fait suffit, on l'espère, pour qu'il ne se reproduise plus.

6. Pour la composition d'entrée à l'École Forestière, on a proposé, cette année, une question qui rappelle celle que le baron de Tott fit jadis à un collége de Constantinople : *Démontrer que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits*. On répondit que la proposition était vraie pour le triangle équilatéral. En viendrons-nous à de telles réponses? *Qui vivra, verra*.

7. Dans une publication récente, on *prescrit* de définir, et même de construire le *rectangle* et le *carré*, avant de connaître la théorie des *parallèles*. Géométrie singulière! D'Alembert dit que cette science *rectifie* les esprits *droits*. Celle-là peut servir à les *courber*, n'importe. On verra bientôt éclore des ouvrages rédigés dans cet esprit, et que les professeurs seront forcés d'acheter et de suivre. Toutefois, je persiste dans l'opinion qu'il y aurait avantage, ou du moins pas grand mal à faire entrer dans les

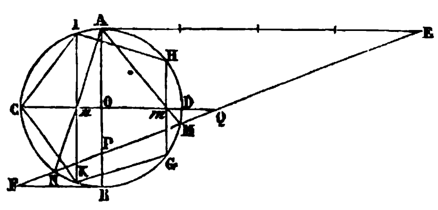
Commissions mathématiques quelques mathématiciens. tels que MM. Cauchy, Chasles, Lamé, Liouville, etc. Lorsqu'il s'agit de réglementer l'enseignement, même élémentaire, d'une science, il faut en consulter les oracles. C'est mon avis.

CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER, D'APRÈS M. STAUDT;

PAR M. HENRI BARRAL,
Professeur de Mathématiques.

M. Staudt a donné, sans démonstration (CRELLE, tome XXIV; 1842), la construction suivante, pour inscrire un pentagone régulier dans un cercle :

AB *et* CD *sont deux diamètres rectangulaires ; sur la tangente en* A, *on prend une longueur* AE *quadruple du rayon ; sur la tangente en* B, *une longueur* BF *égale au rayon ; on mène la droite* EF, *et l'on joint les points* M, N, *où cette ligne coupe la circonférence, au point* A. *Ces droites rencontrent* CD *en* m *et* n; *par ces points, on mène les cordes* GH, IK *parallèles à* AB : *le pentagone* CIHGK *ainsi obtenu est régulier.*



Pour démontrer l'exactitude de cette construction, nous remarquerons que, dans tout pentagone régulier CIHGK, les distances Om, On sont respectivement égales aux côtés des deux décagones réguliers inscrits dans un

cercle de rayon moitié moindre; il suffit donc de faire voir que Om et On sont les côtés des décagones inscrits dans la circonférence qui aurait pour rayon $\frac{1}{2}$ OA.

Désignons OA par R, Om par x, On par y.

Les triangles PAE, PBF donnent

$$PA : PB :: AE : BF;$$

donc

$$PA = \frac{8}{5}R, \quad PB = \frac{2}{5}R, \quad PO = \frac{3}{5}R.$$

Les triangles PAE, POQ donnent

$$OQ : AE :: PO : PA;$$

donc

$$QO = \frac{3}{2}R.$$

On a

(1) $$Mm.mA = mC.mD = R^2 - x^2.$$

Les triangles MAE, MmQ donnent

(2) $$\frac{MA}{Mm} = \frac{AE}{mQ} = \frac{4R}{\frac{3}{2}R - x} = \frac{8R}{3R - 2x};$$

en multipliant membre à membre (1) et (2), on a

$$AM.Am = (R^2 - x^2)\frac{8R}{3R - 2x}.$$

Or les triangles AOm, AMB donnent

$$AM.Am = 2R^2;$$

donc

$$2R^2 = (R^2 - x^2)\frac{8R}{3R - 2x},$$

d'où l'on tire

(3) $$x\left(x - \frac{R}{2}\right) = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

En cherchant la valeur de On, on trouve

$$(4) \qquad y\left(\frac{R}{2}-y\right)=\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Les valeurs absolues des racines de ces deux équations sont les mêmes, et représentent les côtés des décagones inscrits dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$; donc le pentagone CIHGK est régulier.

Note. La construction la plus simple du pentagone régulier est celle-ci. Soient OA, OB deux rayons perpendiculaires; M le milieu OA; la différence entre BM et OM est le côté du décagone; portant cette différence de O en N sur OA, BN est le côté du pentagone (EUCLIDE, liv. XIII, prop. 9 et 10); mais la construction de M. Staudt est remarquable, parce qu'il indique une construction analogue pour la division de la circonférence en *dix-sept* parties égales. On la trouve dans le même volume du Journal de M. Crelle (tome XXIV, page 251), sans figure et sans démonstration. Des fautes typographiques rendent la description inintelligible pour moi. TM.

GRAND CONCOURS (ANNÉE 1851);

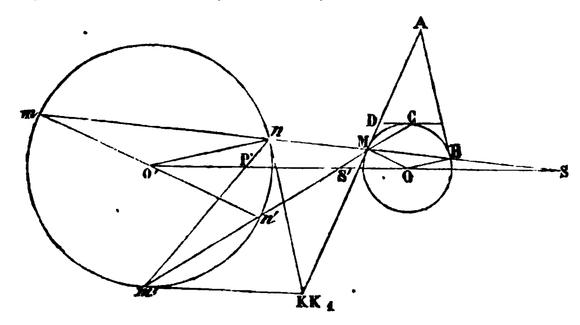
PAR M. GARNIER (FRANÇOIS-PHILIBERT),

Né à Paris, le 15 juillet 1835, Élève du lycée Bonaparte, classe de Mathématiques élémentaires; deuxième division, professeur M. Amiot, Institution Carré-Demailly.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (PREMIER PRIX).

Étant donnés deux cercles o et o' qui ne se touchent pas, mais qui peuvent se couper ou ne pas se couper, indifféremment, de chaque point M, de l'un o, on mène deux droites aux centres de similitude S et S' des deux cercles; ces droites rencontrent l'autre cercle o' en quatre points m, n, m', n'; on demande de prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle o', et les deux

autres sur une droite qui passe toujours par un point fixe, quel que soit le point M pris sur le cercle o.



Je dis d'abord que deux des points m, n, m', n' sont sur un diamètre de o'; je joins oM. Ce rayon est parallèle aux deux rayons $o'm$, $o'n'$ de la circonférence o', d'après la définition même des centres de similitude. On a donc du point o' deux rayons parallèles à une même direction, et, par conséquent, ces rayons sont le prolongement l'un de l'autre; sans quoi, du point o' on pourrait mener deux parallèles à une même droite, ce qui est impossible. Donc la droite mn' est un diamètre de o'.

Je dis, en second lieu, que les deux autres points n et m' sont sur une droite qui passe par un certain point fixe, que l'on peut déterminer.

Par les points n et m' je mène deux tangentes au cercle o', et par M une tangente à o. Les tangentes en n et en M se rencontrent évidemment. J'appelle K leur point de rencontre, et je dis que c'est un point de l'axe radical des deux cercles.

En effet, je mène des tangentes par les points B et C. Les deux triangles nKM et MBA sont semblables; car les angles en M sont égaux comme opposés au sommet; et les droites AB, Kn étant parallèles comme perpendiculaires à des rayons parallèles oB, $o'n$, les angles A et

nKM sont égaux. Or le triangle ABM est isocèle ; car AM et AB sont deux tangentes au cercle o. Donc aussi KnM est isocèle, et l'on a Kn = KM. Par conséquent, K est d'égale puissance par rapport aux deux cercles o et o' ; donc c'est un point de l'axe radical de ces deux cercles.

Si l'on considère maintenant la tangente en m', on voit qu'elle rencontre aussi la tangente en M, en un point que j'appellerai K_1. On prouve, comme précédemment, que K_1 est un point de l'axe radical des deux cercles ; car les triangles $m'K_1M$ et MDC sont semblables, puisque DC et $m'K_1$ sont parallèles, comme perpendiculaires à des rayons parallèles. Or DM = DC, comme tangentes issues d'un même point ; donc $K_1m' = K_1m$. Donc K_1 est aussi un point de l'axe radical des deux cercles.

Les points K et K_1 se trouvent tous les deux sur l'axe radical. Ils se trouvent aussi sur la tangente en M : mais cette tangente ne peut rencontrer l'axe radical qu'en un point ; donc K et K_1 se confondent. Les tangentes en m' et en n se rencontrent donc en un point de l'axe radical des deux cercles o et o'.

Or le point K est le pôle de $m'n$ par rapport à o', puisque c'est le point de rencontre des tangentes menées par les extrémités de cette corde. Et comme le point M est quelconque sur o, il en résulte que le lieu des pôles, par rapport à o', des droites $m'n$, est l'axe radical des deux circonférences o et o'. Donc, toutes les droites $m'n$ passent par le pôle, par rapport au cercle o', de l'axe radical ; car on sait que toutes les droites qui ont leurs pôles sur une autre droite passent par le pôle de cette droite.

Ce point fixe P est facile à déterminer ; car on sait construire l'axe radical de deux circonférences, et déterminer le pôle d'une droite donnée, par rapport à une circonférence donnée.

Si les circonférences o et o' étaient sécantes ou intérieures, la même démonstration s'appliquerait.

Note. MM. Dehons, élève du lycée de Nîmes (classe Haillecourt), et Decourbes ont envoyé des solutions qui s'appuient sur les mêmes théorèmes que la solution précédente.

Ce concours est un point d'arrêt dans l'enseignement. Nous n'aurons probablement plus de semblables questions à enregistrer. Tous les géomètres connaissent les *Diverses solutions de la question de mathématiques élémentaires, proposée au concours général en* 1851 ; in-8°. L'auteur a gardé l'anonyme, mais l'on reconnaît la touche du maître.

NOUVELLE EXPRESSION DE L'AIRE D'UNE SURFACE (STREBOR)

(voir t. IX, p. 310);

PAR M. H. FAURE.

Soit R la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur un plan tangent quelconque à une surface donnée, et soient θ, φ les angles qui déterminent la position de cette droite; en posant, pour abréger,

$$L = R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2},$$

$$M = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{d^2R}{d\theta\, d\varphi},$$

$$N = R + \frac{d^2R}{d\theta^2},$$

l'aire de la surface dont il s'agit aura pour expression

$$A = \int\int\left(LN - \frac{M^2}{\sin\theta}\right) d\theta\, d\varphi. \qquad \text{(Strebor.)}$$

La démonstration de ce théorème est très-simple, mais elle conduit à des calculs trop complexes pour que nous puissions les exposer ici; nous allons simplement indiquer la marche que nous avons suivie pour y arriver.

Si l'on regarde les coordonnées x, y, z des points d'une surface comme fonctions de deux variables indépendantes a et b, de telle sorte que l'on ait

$$dx = \frac{dx}{da}da + \frac{dx}{db}db,$$

$$dy = \frac{dy}{da}da + \frac{dy}{db}db,$$

$$dz = \frac{dz}{da}da + \frac{dz}{db}db,$$

et que l'on pose, pour abréger,

$$\frac{dx\,dy}{da\,db} - \frac{dx\,dy}{db\,da} = Z,$$

$$\frac{dz\,dx}{da\,db} - \frac{dz\,dx}{db\,da} = Y,$$

$$\frac{dy\,dz}{da\,db} - \frac{dy\,dz}{db\,da} = X,$$

on trouvera

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{X}{Z}, \quad \frac{dz}{dy} = q = -\frac{Y}{Z}.$$

(*Voyez* Lacroix, n° 774.)

Donc l'aire d'une surface sera exprimée par la formule

$$A = \int\!\!\int \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\, da\, db.$$

Supposons que x, y, z soient les coordonnées du point de contact d'une surface avec son plan tangent, et que l'on projette la droite qui joint le point fixe avec le point (x, y, z) sur la perpendiculaire abaissée de ce même point fixe sur son plan tangent; il est facile de voir, en employant les notations indiquées plus haut, que R aura pour expression

$$(1) \qquad R = x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta;$$

d'où l'on déduit

$$(2) \qquad \frac{dR}{d\theta} = x \cos\varphi \cos\theta + y \sin\varphi \cos\theta - z \sin\theta,$$

$$(3) \qquad \frac{dR}{d\varphi} = y \cos\varphi \sin\theta - x \sin\varphi \sin\theta,$$

puisque

$$\sin\theta \cos\varphi \, dx + \sin\theta \sin\varphi \, dy + \cos\theta \, dz = 0.$$

Résolvant les équations (1), (2), (3) par rapport à x, y, z, on trouve

$$x = R \sin\theta \cos\varphi + \frac{dR}{d\theta} \cos\varphi \cos\theta - \frac{dR}{d\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta},$$

$$y = R \sin\theta \sin\varphi + \frac{dR}{d\theta} \sin\varphi \cos\theta + \frac{dR}{d\varphi} \frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

$$z = R \cos\theta - \frac{dR}{d\theta} \sin\theta.$$

Et si l'on regarde θ et φ comme des variables indépendantes dont R serait une fonction, on trouvera

$$\frac{dx}{d\theta} = \quad M \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + N \cos\varphi \cos\theta + \frac{dR}{d\theta} \sin(\theta - \varphi),$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = - M \cos\theta \cos\varphi - L \sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = - M \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + N \sin\varphi \cos\theta + \frac{dR}{d\theta} \sin(\theta - \varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = - M \cos\theta \sin\varphi + L \cos\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = - N \sin\theta,$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \quad M \sin\theta.$$

De là on déduit les valeurs de X, Y, Z, faisant $a = \theta$, $b = \varphi$, et par suite, la valeur indiquée pour la surface.

Dans le cas d'une courbe plane, on peut donner aussi

pour l'expression de la longueur de l'arc, une forme analogue à la précédente, mais qui se déduit très-aisément de la valeur de la perpendiculaire R abaissée d'un point fixe sur la tangente à la courbe. On a en effet, x, y étant les coordonnées du point de contact,

$$R = y \sin \varphi + x \cos \varphi,$$

d'où

$$\frac{dR}{d\varphi} = y \cos \varphi - x \sin \varphi,$$

puisque

$$\sin \varphi \, dy + \cos \varphi \, dx = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on trouve

$$x = R \cos \varphi - \frac{dR}{d\varphi} \sin \varphi,$$

$$y = R \sin \varphi + \frac{dR}{d\varphi} \cos \varphi;$$

puis, en regardant R comme une fonction de φ,

$$dx = -\sin \varphi \left(R + \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right) d\varphi,$$

$$dy = \cos \varphi \left(R + \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right) d\varphi.$$

Ajoutant les carrés de ces deux expressions, on trouvera pour la longueur S de la courbe, l'expression

$$S = \int \left(R + \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right) d\varphi = \int N \, d\varphi.$$

Les applications de ces formules peuvent être fréquentes; elles offrent cette particularité de présenter l'expression de l'aire ou de la longueur de la courbe, sous forme rationnelle.

On trouvera ainsi que l'aire d'un ellipsoïde dont les

demi-axes sont a, b, c, est égale à l'intégrale double

$$a^2 b^2 c^2 \int\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{[c^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)]^2},$$

prise entre les limites o, $\frac{\pi}{2}$.

Relativement à l'ellipse dont les demi-axes seraient a et b, on trouvera, pour l'expression de son arc,

$$a^2 b^2 \int \frac{d\varphi}{(a^2 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{où} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Cela s'obtient facilement, en remarquant que la perpendiculaire abaissée du centre d'un ellipsoïde sur son plan tangent a pour valeur

$$R = \sqrt{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + b^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + c^2\cos^2\theta},$$

de même que, dans l'ellipse, la perpendiculaire abaissée de son centre sur la tangente est égale à

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Ces valeurs s'obtiennent par le calcul, ou plus simplement en se rappelant que la somme des carrés des projections des demi-axes principaux d'une ellipse ou d'un ellipsoïde sur une droite (R) est égale à la somme des carrés des projections de tout autre système de diamètres conjugués sur la même droite. Si l'on prend pour ce second système celui dont la perpendiculaire R fait partie, on arrivera à exprimer la longueur de cette droite en fonction des axes et des angles qu'elle fait avec eux, lesquels sont bien faciles à éliminer.

SOLUTION DE LA QUESTION 195 (PLUCKER)

(voir t. VII, p. 368);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Du séminaire de Vals.

THÉORÈME. *Trois cercles étant donnés dans un même plan; construisant un cercle coupant rectangulairement l'un des deux cercles donnés, et passant par les intersections des deux autres; les trois nouveaux cercles passent par les deux mêmes points.*

Démonstration. Soient A, B, C les centres des cercles donnés, r_α, r_β, r_γ leurs rayons, A_1, B_1, C_1 les centres des nouveaux cercles; les mêmes lettres se rapportant aux cercles qui se coupent rectangulairement.

Prouvons que les axes radicaux des cercles A_1, B_1, C_1 ont un point commun non situé à l'infini; de plus, que les centres de ces cercles sont en ligne droite, et le théorème sera démontré.

Les axes radicaux des cercles A et B_1, A et C_1 concourent au centre radical des cercles A, B, C; donc l'axe radical des cercles B_1 et C_1 passe en ce point. On démontre de même que les deux autres axes radicaux des cercles A_1, B_1, C_1 passent en ce point.

Appliquons le théorème des transversales au triangle ABC, et, pour cela, déterminons le segment A_1C.

A_1, B_1, C_1 sont respectivement les côtés BC, AC, AB du triangle ABC, représentés par a, b, c.

Représentant par E, D les intersections des cercles B et C, par F la rencontre de la corde ED avec la droite BC,

et par G le pied d'une perpendiculaire abaissée de A sur cette même droite BC, on a

$$\overline{A_1D}^2 = \overline{A_1F}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{A_1C}^2 + 2\,A_1C \times CF + r_\gamma^2$$
$$= \overline{A_1C}^2 + A_1C\,\frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 + a^2}{a} + r_\gamma^2,$$

$$(1)\quad \overline{A_1A}^2 = r_\alpha^2 + \overline{A_1D}^2 = \overline{A_1C}^2 + A_1C\,\frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 + a^2}{a} + r_\alpha^2 + r_\gamma^2.$$

D'un autre côté,

$$(2)\quad \overline{A_1A}^2 = \overline{A_1C}^2 \pm 2\,A_1C \times CG + b^2 = \overline{A_1C}^2 + A_1C\,\frac{a^2+b^2-c^2}{a} + b^2.$$

Égalant les seconds membres des égalités (1) et (2), on obtient

$$A_1C = \frac{a(b^2 - r_\alpha^2 - r_\gamma^2)}{c^2 - b^2 + r_\gamma^2 - r_\beta^2},$$

puis, en vertu de la symétrie, et par permutation tournante,

$$B_1A = \frac{b(c^2 - r_\beta^2 - r_\alpha^2)}{a^2 - c^2 + r_\alpha^2 - r_\gamma^2},$$

$$C_1B = \frac{c(a^2 - r_\gamma^2 - r_\beta^2)}{b^2 - a^2 + r_\beta^2 - r_\alpha^2}.$$

On en déduit

$$A_1B = A_1C + a = \frac{a(c^2 - r_\beta^2 - r_\alpha^2)}{c^2 - b^2 + r_\gamma^2 - r_\beta^2},$$

$$B_1C = \frac{b(a^2 - r_\gamma^2 - r_\beta^2)}{b^2 - a^2 + r_\alpha^2 - r_\gamma^2},$$

$$C_1A = \frac{c(b^2 - r_\alpha^2 - r_\gamma^2)}{c^2 - b^2 + r_\beta^2 - r_\alpha^2};$$

$$A_1C \times B_1A \times C_1B = A_1B \times B_1C \times C_1A.$$

Les centres A_1, B_1, C_1 sont donc en ligne droite.

Il est à remarquer que les six cercles A, B, C, A_1, B_1, C_1

peuvent être considérés de quatre manières différentes, comme partagés en deux groupes de trois cercles, ayant entre eux les mêmes relations que les cercles A, B, C, et A_1, B_1, C_1.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU MOYEN DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN;

PAR M. HUET,
Professeur au collége de Toulon.

1°. Trouver les traces d'un plan qui passe par un point donné, qui fasse avec la ligne de terre un angle donné et qui soit tel, que les traces fassent entre elles un angle donné.

2°. Étant données trois droites qui se rencontrent dans l'espace, trouver sur l'une d'elles un point qui soit à égale distance des deux autres.

3°. Étant donnés quatre points A, B, C, D, mener par le point A un plan tel, qu'en abaissant sur ce plan des perpendiculaires par les points B, C, D, leurs pieds soient les sommets d'un triangle équilatéral, ou d'un triangle semblable à un triangle donné.

4°. Par un point donné mener un plan qui rencontre un plan donné suivant une droite d'une longueur donnée (en considérant cette droite comme terminée à ses deux traces), et tel, que l'angle qu'il fait avec ce plan soit égal à un angle donné; ou bien tel, que ses traces fassent entre elles un angle donné.

QUESTIONS.

262. $(-p)^n = -\frac{n}{1}C_{p,n} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}C_{2p,n} - \ldots \pm C_{np,n}$:

n est un nombre entier positif, p une quantité quelconque ; et

$$C_{p,n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n}. \qquad \text{(Catalan.)}$$

263. Démontrer que l'équation suivante a *sept* racines comprises entre 0 et 1 :

$$3432x^7 - 12012x^6 + 16632x^5 - 11550x^4 + 4200x^3$$
$$- 756x^2 + 56x - 1 = 0. \qquad \text{(Gauss.)}^*$$

224. Une sphère a un mouvement de rotation uniforme autour d'un de ses diamètres, et un mouvement uniforme de révolution autour d'un axe situé hors de la sphère et parallèle au diamètre axe de rotation ; les deux vitesses angulaires sont égales et de sens opposé ; chaque diamètre de la sphère décrit un cylindre.

256. Si $m = p^2 - q$, la suite des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{pa + mb}{a + pb}$, $\frac{a''}{b''} = \frac{pa' + mb'}{a' + pb'}$, etc., converge vers $\sqrt{m}$, quelle que soit la fraction initiale $\frac{a}{b}$; m, p, q, a, b sont des nombres entiers positifs donnés. (Prouhet.)

266. Soient trois axes rectangulaires ; on les divise, à partir de l'origine, chacun en parties égales à l'unité ; par les points de division d'un axe on mène respective-

(*) M. Koralek, habile et expéditif calculateur, a trouvé les six racines irrationnelles avec sept décimales ; la septième est 0,5.

ment des plans parallèles au plan des deux autres axes; ces trois systèmes de plans parallèles déterminent, par leurs intersections, tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers. Soit un point d'intersection ayant pour coordonnées les nombres entiers m, n, p; ce point est le sommet d'un parallélipipède. Prenons, dans l'intérieur de ce parallélipipède, trois points ayant pour coordonnées entières respectives m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3. Le plan qui passe par ces trois points partage le parallélipipède en deux portions; combien chaque portion renferme-t-elle de nombres entiers?

267. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, M sont six points situés sur une sphère :

d_1 = distance rectiligne de A_1 à M,
d_2 = *id.* A_2 à M,
d_3 = *id.* A_3 à M;
etc.
v_1 = volume du tétraèdre $A_2A_3A_4A_5$,
v_2 = *id.* $A_1A_3A_4A_5$,
v_3 = *id.* $A_1A_2A_4A_5$,
v_4 = *id.* $A_1A_2A_3A_5$,
v_5 = *id.* $A_1A_2A_3A_4$.

On a la relation analytique

$$v_1d_1 + v_2d_2 + v_3d_3 + v_4d_4 + v_5d_5 = 0.$$ (LUCHTERHAND.)

268. Étant donnés un cône du second degré et un point fixe dans l'intérieur du cône; mener par ce point un plan tel, que la section ait le point fixe pour foyer.

(YVON VILLARCEAU.)

269. Deux surfaces se coupant suivant une ligne de courbure, commune à l'une et à l'autre; le long de cette ligne, les deux surfaces se coupent sous le même angle.

(O. T.)

SUR LE THÉORÈME DE M. STURM;

D'APRÈS M. BORCHARDT.

(Journal de M. Liouville, tome XII, page 54; 1847.

1. *Lemme.* Soient $V = 0$ une équation algébrique de degré n; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n racines; $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ les fonctions *sturmiennes*; on a

$$V = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$
$$V_1 = \Sigma(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n),$$
$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2}\Sigma(a_1 - a_2)^2(x - a_3)(x - a_4)\ldots(x - a_n),$$
$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3}\Sigma(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_2)^2(a_2 - a_3)^2(x - a_4)(x - a_5)\ldots(x - a_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_n = \frac{1}{\lambda_n}\Sigma(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2\ldots(a - a_n)^2(a_2 - a_3)^2\ldots(a_{n-1} - a_n)^2.$$

Faisons

$$p_1 = n,$$
$$\lambda_2 = p_1^2, \qquad p_2 = \Sigma(a_1 - a_2)^2,$$
$$\lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2, \qquad p_3 = \Sigma(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2,$$
$$\lambda_4 = \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_5 = \left(\frac{p_2 p_3}{p_1 p_3}\right)^2, \qquad p_n = (a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2\ldots(a_{n-1} - a_n)^2.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(SYLVESTER.)

$p_1, p_2, \ldots$ étant des fonctions symétriques, les racines sont des quantités réelles; donc les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots,$ sont des quantités positives.

Observation. Ce beau théorème, énoncé seulement par

l'illustre auteur (voir *Nouvelles Annales*, t. Ier, p. 166). a été démontré par M. Sturm.

(LIOUVILLE, tome VII, page 356; 1842.)

2. Désignons par v_k le coefficient de la plus haute puissance de x^{n-k} de x dans la fonction V_k, et formons les deux séries

$$(-1)^n v,\quad (-1)^{n-1} v_1,\quad (-1)^{n-2} v_2,\ldots,\quad +v_{n-2},\quad -v_{n-1},\quad v_n.$$
$$v,\quad v_1,\quad v_2,\ldots,\quad v_{n-2},\quad v_{n-1},\quad v_n.$$

Soient α et β les nombres des *permanences* de signes. dans la première et dans la deuxième série, on aura

$$\alpha + \beta = n.$$

En effet, si $\beta = 0$, on a évidemment $\alpha = n$. S'il y a une variation dans la deuxième série, par exemple entre v et v_1, il y aura une permanence correspondante dans la série supérieure; donc le nombre total des variations ne change pas.

3. Soit v le nombre des racines réelles de l'équation; on sait qu'on a $v = \alpha - \beta$, ou bien, d'après ce qui précède, $v = n - 2\beta$; ainsi l'équation a β couples de racines imaginaires, c'est-à-dire que l'équation a autant de couples de racines imaginaires que la seconde série présente de variations.

4. Il est évident, ayant égard au lemme de Sylvester, que l'on a

$$v = 1,\quad v_1 = p_1,\quad v_2 = \frac{1}{\lambda_2} p_2,\quad v_3 = \frac{1}{\lambda_3} p_3,\ldots,\quad v_n = \frac{1}{\lambda_n} p_n.$$

Or $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont des quantités positives; donc la série

$$1,\quad p_1,\quad p_2,\ldots,\quad p_n$$

présente le même nombre de variations que la série

$$v,\quad v_1,\quad v_2,\ldots,\quad v_n;$$

par conséquent, l'équation a autant de couples de racines imaginaires que la série en p a de variations. Ainsi, on peut former *directement* une série où les signes des termes apprennent à connaître le nombre des racines réelles et imaginaires, sans avoir besoin de calculer les fonctions de M. Sturm. Comme les formules de Waring donnent les valeurs des fonctions symétriques en fonction des coefficients (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 76), on trouve aisément les termes de la série en p.

Observation. M. Hermite vient d'étendre le théorème de M. Sturm à deux équations à deux inconnues; extension depuis longtemps désirée, et d'une haute importance, même pratique. Ce théorème donne le moyen d'obtenir les racines imaginaires par approximation, puisque la recherche de ces racines se ramène à la résolution de deux équations, à deux inconnues.

RECTIFICATION.

On lit (page 333) que l'on n'a pas calculé les fonctions de M. Sturm, troisième et quatrième degré, pour des équations complètes. M. Cayley a calculé les fonctions V', V_2, V_3, V_4 pour des équations *complètes* de degré n (*Journal de Mathématiques*, t. XIII, p. 269; 1848). Le célèbre géomètre fait voir qu'étant données deux fonctions algébriques et entières quelconques, on peut en déduire une suite d'autres fonctions jouissant de cette propriété, que si l'une d'elles s'évanouit pour une certaine valeur de la variable, les fonctions précédente et suivante sont alors de signes contraires; propriété caractéristique des fonctions de M. Sturm. La proscription vandale d'un des plus beaux, des plus utiles théorèmes des

temps modernes, nous impose le devoir d'y revenir sans cesse. La découverte de ce théorème unique, trait de génie, attache au nom du célèbre inventeur une gloire solide parmi les savants; la seule qu'un savant doit ambitionner.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE. — THÉORÈME DE LEGENDRE;

PAR M. E. CATALAN.

Dans le cours que j'ai fait cette année au lycée Saint-Louis, j'ai donné à mes élèves la démonstration suivante du célèbre théorème à l'aide duquel on ramène la résolution d'un triangle sphérique, ayant ses côtés fort petits, à la résolution d'un triangle rectiligne. Cette démonstration me paraissant assez simple, j'ai pensé qu'elle pourrait peut-être intéresser les lecteurs des *Annales*.

Soit un triangle sphérique dont les côtés sont supposés très-petits relativement au rayon R de la sphère. Soient a, b, c les longueurs de ces côtés, exprimées en *mètres*. Nous aurons, par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$(1) \qquad \cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A,$$

A étant l'angle opposé au côté a.

Soit un triangle rectiligne ayant les côtés égaux à ceux du triangle sphérique rectifié; nous aurons aussi

$$(2) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A',$$

en appelant A' l'angle opposé au côté a.

Posons

$$A = A' + x,$$

x sera un très-petit angle, et nous aurons, à fort peu près,

$$\text{(3)} \qquad \cos A = \cos A' - x \sin A'.$$

Cette formule suppose, bien entendu, que l'on a mesuré les angles par les arcs correspondants, *dans le cercle dont le rayon est* 1.

Développons les sinus et cosinus qui entrent dans l'équation (1); nous aurons, en nous bornant aux termes du quatrième ordre,

$$\cos\frac{a}{R} = 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4}, \quad \cos\frac{b}{R} = 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4},$$

$$\cos\frac{c}{R} = 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4},$$

$$\sin\frac{b}{R} = \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}, \quad \sin\frac{c}{R} = \frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}.$$

La substitution de ces valeurs et de la valeur (3), dans l'équation (1), donne

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)$$
$$+ \frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{6R^2}\right)(\cos A' - x \sin A');$$

d'où, en effectuant et en négligeant des termes d'un ordre supérieur au quatrième,

$$\text{(4)} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} + \frac{b^2c^2}{4R^4} \\ &+ \frac{c^4}{24R^4} + \frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2}\right)\cos A' - \frac{bc}{R^2} x \sin A'. \end{aligned} \right.$$

Mais, en vertu de la formule (2),

$$\text{(5)} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} + \frac{b^2c^2}{12R^4} \\ &+ \frac{c^4}{24R^4} + \frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2}\right)\cos A' + \frac{b^2c^2}{6R^2}\cos^2 A'. \end{aligned} \right.$$

Retranchons membre à membre les équations (4) et (5); nous aurons

$$o = \frac{b^2c^2}{6R^4} - \frac{bc}{R^2} x \sin A' - \frac{b^2c^2}{6R^4} \cos^2 A';$$

d'où

$$x = \frac{bc}{6R^2} \sin A'.$$

Soit maintenant T' l'aire du triangle rectiligne,

$$T' = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

par suite,

$$x = \frac{T'}{3R^2}.$$

On a donc, à fort peu près,

$$A = A' + \frac{T'}{3R^2}, \quad B = B' + \frac{T'}{3R^2}, \quad C = C' + \frac{T'}{3R^2};$$

d'où

$$A + B + C - \pi = \frac{T'}{R^2}.$$

Le premier membre de cette formule est ce qu'on nomme l'*excès sphérique*. En le désignant par ε, nous aurons donc

$$A = A' + \frac{1}{3}\varepsilon, \quad B = B' + \frac{1}{3}\varepsilon, \quad C = C' + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Ainsi, *chacun des angles du triangle sphérique se compose de l'angle correspondant du triangle rectiligne, augmenté du tiers de l'excès sphérique*. C'est là le théorème de Legendre.

THÉORÈME DE PYTHAGORE, SPHÉRIQUE;

D'APRÈS CHR. GUDERMANN.

(Journal de M. Crelle, t. XLII, p. 280; 1851.)

1. *Définition.* Un *rectangle sphérique* est un quadrilatère sphérique dont les côtés opposés sont égaux, et dont les quatre angles sont égaux.

Un *carré sphérique* est un quadrilatère sphérique qui a les *quatre* côtés égaux et les quatre angles égaux.

Dans ce qui suit, nous supprimons l'épithète sphérique qui doit être sous-entendue.

2. *Lemme.* α, β étant les côtés adjacents d'un rectangle, C l'angle et s l'aire, on a

$$\sin\frac{s}{4} = \tang\frac{1}{2}\alpha\tang\frac{1}{2}\beta.$$

Démonstration. Le rectangle est inscriptible; on a donc la formule donnée page 438 du tome VIII; savoir :

$$\tang\frac{1}{2}\alpha\tang\frac{1}{2}\beta\tang\frac{1}{2}\gamma = \tang\frac{\gamma}{2}\sin\frac{s}{4},$$

où γ est la diagonale.

Observation. Dans la formule citée, il faut supprimer le coefficient 2, qui est fautif.

On doit avoir

$$\tang\frac{1}{2}\alpha\tang\frac{1}{2}6 < 1, \quad \text{ou} \quad \alpha+\beta < \pi.$$

Corollaire. Si le rectangle devient un carré, on a

$$\sin\frac{s}{2} = \tang^2\frac{1}{2}\alpha, \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

3. THÉORÈME. *Étant donné un triangle rectangle,*

α, β sont les côtés de l'angle droit, et γ l'hypoténuse; si l'on construit sur chaque côté un carré, et que l'on représente par c l'aire du carré construit sur l'hypoténuse, et par a, b les aires des carrés construits sur les deux autres côtés, on aura

$$\mathfrak{L}\left(\frac{c}{4}\right)=\mathfrak{L}\left(\frac{a}{4}\right)+\mathfrak{L}\left(\frac{b}{4}\right).$$

Démonstration.

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\log\sqrt{\frac{1}{\cos\gamma}}=\log\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}+\log\sqrt{\frac{1}{\cos\beta}}.$$

$$\sin\frac{a}{4}=\text{tang}^2\frac{1}{2}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\sin\frac{a}{4}}{1+\sin\frac{a}{4}}.$$

On a des équations analogues pour $\cos\beta$ et $\cos\gamma$; donc

$$\log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{c}{4}}{1-\sin\frac{a}{4}}}=\log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{a}{4}}{1-\sin\frac{a}{4}}}+\log\sqrt{\frac{1+\log\frac{b}{4}}{1-\log\frac{b}{4}}},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{L}\left(\frac{c}{2}\right)=\mathfrak{L}\left(\frac{a}{2}\right)+\mathfrak{L}\left(\frac{b}{2}\right).$$

Observation. Cette proposition est analogue à celle de Pythagore pour le triangle rectiligne.

Nous sommes obligés d'entrer dans quelques détails pour faire comprendre cette notation. Désignons par des lettres initiales capitales les lignes trigonométriques hyperboliques, coordonnées de l'hyperbole équilatère.

Soient

$$\text{Cos}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{Sin}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \text{d'où}\ \text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x = 1,$$

$$\text{Tang}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\quad e^x = \text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x,$$

$$e^{-x} = \text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x,$$

$$x = \log(\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x);\quad -x = \log(\text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x),$$

$$2x = \log\left(\frac{1 + \text{Tang}\,x}{1 - \text{Tang}\,x}\right);$$

faisons

$$\text{Tang}\,x = z,$$

ce qui est toujours possible; nous aurons

$$x = \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Par analogie, on nomme x l'arc dont la Tangente hyperbolique est égale à z; ainsi

$$\text{arc}\,\text{Tang} = z = \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}};$$

c'est l'arc dont la Tangente hyperbolique est z, que Gudermann désigne par $\mathfrak{T}(z)$, quantité qui se rattache facilement à une aire hyperbolique.

Il est aisé de voir que si le rayon de la sphère devient infini, $\mathfrak{T}\left(\frac{c}{2}\right)$ devient $\frac{\gamma^2}{4}$.

Donc alors

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2;$$

théorème de Pythagore.

Note. Ce beau théorème est le travail ultime du célèbre professeur de l'Université de Munster qui a fait faire tant de progrès à la géométrie de la sphère. Il a écrit ce théorème la veille de sa mort, et a été enlevé subitement à la science qu'il cultivait avec tant d'ardeur et de succès, le 21 septembre 1851.

Versé dans toutes les branches des mathématiques, il possédait surtout une grande habileté pour le calcul; c'est ce que montrent les nombreux Mémoires dont il a enrichi le Journal de M. Crelle. A la fin du premier cahier du tome XLIII, on trouve le *fac-simile* du théorème ci-dessus en *latin* et la lettre d'envoi en allemand, en caractères gothiques; l'une et l'autre d'une écriture fine et très-lisible.

Dans plusieurs questions physico-mathématiques, on fait un emploi avantageux des sinus, cosinus, etc., hyperboliques (*Leçons sur l'élasticité*, page 152). Gudermann a publié des Tables de ces lignes. M. Yvon Villarceau les a considérablement perfectionnées, en calculant ces lignes par *centièmes*, à commencer par 0,01, et a fini par 15; le tout avec 15 décimales. Un gouvernement s'honore en encourageant la publication de tels travaux.

THÉORÈMES SUR LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE;

PAR M. GEORGES RITT.

Soient

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse, axes rectangulaires;

DOD' l'axe de la développée, de même direction que l'axe a;

EOE' l'axe de la développée, de même direction que l'axe b.

1. La surface totale renfermée dans la développée de l'ellipse est égale aux $\frac{3}{8}$ d'un cercle dont le rayon est une moyenne proportionnelle entre les demi-axes OD, OE de la développée.

2. x_1, y_1 désignant les coordonnées du centre de gravité de la branche DE, on a

$$x_1 = \frac{3}{16}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{a^5}{c(a^3 - b^3)},$$

$$y_1 = \frac{3}{16}\left[5\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]\frac{b^5}{c(a^3 - b^3)}.$$

3. x_2, y_2 étant les coordonnées du centre de gravité de la portion de surface DOE, comprise entre les axes et la branche DE,

$$x_2 = \frac{8.6.4.2}{7.5.3.1} \frac{\left(\frac{c^2}{a}\right)}{\frac{\pi}{2}},$$

$$y_2 = \frac{8.6.4.2}{7.5.3.1} \frac{\left(\frac{c^2}{b}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)};$$

et le centre de gravité se trouve sur le rayon vecteur issu du centre parallèlement à la corde ED′, qui est perpendiculaire à BA.

4. La surface du solide engendré par la révolution de DOE autour de l'axe OE est exprimée par

$$S_1 = \frac{3}{16}\pi^2 \frac{a^4}{bc};$$

et, autour de l'axe OD,

$$S_2 = \frac{3}{16} 2\pi \frac{b^4}{ac}\left[5\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right].$$

Quant aux volumes, on a

$$v_1 = \frac{4.2.1}{7.5.3} 2\pi \frac{c^6}{a^2 b},$$

$$v_2 = \frac{4.2.1}{7.5.3} 2\pi \frac{c^6}{ab^2};$$

de sorte que

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{b}{a}.$$

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. J.-A. SERRET.

(*Traité d'Arithmétique* de M. Serret, page 116.)

Soient

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots, \quad A_i,$$

i nombres entiers quelconques.

Soient

P_1 le produit de tous ces nombres;

P_λ le produit des plus grands communs diviseurs de ces mêmes nombres considérés λ à λ;

P_i le plus grand commun diviseur de tous les nombres.

Soient enfin

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots P_{i-1}}{P_2 P_4 P_6 \ldots P_i} \text{ si } i \text{ est pair,}$$

ou

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots P_i}{P_2 P_4 P_6 \ldots P_{i-1}} \text{ si } i \text{ est impair.}$$

Je dis que M est le plus petit commun multiple des nombres proposés (LEBESGUE, *Journal de Mathématiques*, tome II, page 258; 1837).

Démonstration. Soit θ un facteur premier divisant k des nombres proposés

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_k;$$

par exemple, soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_k$$

les exposants des puissances de θ les plus élevées par lesquelles ces nombres sont respectivement divisibles. Je supposerai, pour fixer les idées, que ces exposants sont rangés par ordre de grandeur à partir du plus petit; en sorte que chacun d'eux peut être égal, mais non inférieur au précédent.

La plus haute puissance de θ qui divise P_1 a pour exposant

$$\varpi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Cherchons généralement l'exposant ϖ_λ de la plus haute puissance de θ contenue dans P_λ.

Comme ceux des nombres proposés qui ne font pas partie de la série

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_k,$$

n'admettent pas le facteur θ, P_λ n'est divisible par θ que si λ est inférieur ou au plus égal à k, et il est évident que, pour avoir ϖ_λ, il suffit de former tous les groupes de λ nombres parmi A_1, A_2, $A_k, \ldots$; de prendre dans chaque groupe le plus grand commun diviseur de tous les nombres, puis l'exposant de la plus haute puissance de θ, qui le divise; et enfin d'ajouter ces exposants. Or, dans cette somme d'exposants, ou dans ϖ_λ, α_1 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_1; α_2 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_2 et ne renfermant pas A_1; α_3 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_3 et ne renfermant ni A_2 ni A_1; et ainsi de suite, jusqu'à $\alpha_{k-\lambda+1}$, qui ne se trouvera qu'une seule fois. En désignant donc par C_μ le nombre des combinaisons de μ lettres $\lambda - 1$ à $\lambda - 1$, on aura

$$\varpi_\lambda = C_{k-1}\alpha_1 + C_{k-2}\alpha_2 + C_{k-3}\alpha_3 + \ldots + C_\lambda \alpha_{k-\lambda} + \alpha_{k-\lambda+1},$$

ou

$$\varpi_\lambda = \frac{(k-1)\ldots(k-\lambda+1)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\alpha_1 + \frac{(k-2)\ldots(k-\lambda)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\alpha_2 + \ldots$$
$$+ \frac{(k-f)\ldots(k-f-\lambda+2)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\alpha_f + \ldots + \alpha_{k-\lambda+1}.$$

On a, d'après cela,

$$\varpi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_f + \ldots + \alpha_k,$$
$$\varpi_2 = \frac{k-1}{1}\alpha_1 + \frac{k-2}{1}\alpha_2 + \ldots + \frac{k-f}{1}\alpha_f + \ldots + \alpha_{k-1},$$

$$\varpi_3 = \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\alpha_1 + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\alpha_2 + \ldots + \frac{(k-f)(k-f-1)}{1.2}\alpha_f + \ldots + \alpha_{k-1},$$

. . . .

$$\varpi_{k-1} = \frac{(k-1)\ldots 2}{1.2\ldots(k-2)}\alpha_1 + \frac{(k-2)\ldots 1}{1.2\ldots(k-1)}\alpha_2,$$

$$\varpi_k = \frac{(k-1)\ldots 1}{1.2\ldots(k-1)}\alpha_1.$$

Si ϖ désigne l'exposant de θ au numérateur de la fraction M supposée réduite à sa plus simple expression, on aura

$$\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 + \varpi_3 - \varpi_4 + \ldots \pm \varpi_{k-1} \mp \varpi_k,$$

donc

$$\begin{aligned}\varpi = \alpha_1 &\left[1 - \frac{k-1}{1} + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2} + \ldots \pm \frac{(k-1)\ldots 2}{1.2\ldots(k-2)} \mp \frac{(k-1)\ldots 1}{1.2\ldots(k-1)}\right] \\ + \alpha_2 &\left[1 - \frac{k-2}{1} + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2} - \ldots \pm \frac{(k-2)\ldots 1}{1.2\ldots(k-2)}\right] \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \alpha_f &\left[1 + \frac{(k-f)}{1} + \frac{(k-f)(k-f-1)}{1.2} - \ldots \pm \frac{(k-f)\ldots 2.1}{1.2\ldots(k-f)}\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \alpha_{k-1}&(1-1) \\ + \alpha_k&.\end{aligned}$$

Les coefficients de α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ sont nuls; car ce sont les puissances $k-1$, $k-2$, etc., du binôme $1-1$; donc

$$\varpi = \alpha_k.$$

Il suit de là que M est un nombre entier, et la puissance de θ, qui le divise, est précisément la plus haute puissance de θ par laquelle l'un des nombres proposés est divisible; donc M est le plus petit multiple commun des nombres proposés. C. Q. F. D.

SUR LES RACINES PRIMITIVES DE L'ÉQUATION

$x^n - 1 = 0$;

PAR M. LEBESGUE.

1. L'équation

(1) $$x^n = 1$$

a n racines données par la formule

$$x_i = \cos\frac{2i\pi}{n} + \sin\frac{2i\pi}{n}\sqrt{-1},$$

dans laquelle il faut faire successivement

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1.$$

On tire de là

$$x_i^k = \cos\frac{ik}{n}2\pi + \sin\frac{ik}{n}2\pi\sqrt{-1}.$$

Pour réduire x_i^k à l'unité, il faut rendre $\frac{ik}{n}$ entier ; d'où il suit qu'en prenant d pour plus grand commun diviseur de i et n, il faut que k soit multiple de $\frac{n}{d}$. La plus petite valeur de k est donc $\frac{n}{d}$. On dit que la racine x_i *appartient* à l'exposant $\frac{n}{d}$.

Les racines primitives sont celles qui appartiennent à l'exposant n; il y en a autant que de nombres premiers à n et moindres que n; représentons ce nombre de nombres premiers à n par $\varphi(n)$.

2. Soit $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, a, b, c,... étant des nombres premiers différents ; les racines non primitives de $x^n = 1$

appartiennent nécessairement à un exposant diviseur d'un des nombres $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$

De sorte que, si l'on cherchait le plus petit multiple des binômes $x^{\frac{n}{a}} - 1$, $x^{\frac{n}{b}} - 1$, $x^{\frac{n}{c}} - 1, \ldots$, ce plus petit multiple étant X, l'équation aux racines primitives serait

$$\frac{x^n - 1}{X} = 0,$$

équation du degré $\varphi(n)$, ayant pour racines précisément toutes les racines primitives de $x^n = 1$.

Quant à la règle pour trouver le plus petit multiple de plusieurs fonctions entières $f(x)$, $F(x)$, etc., elle est précisément la même que celle qui sert à trouver le plus petit multiple de plusieurs nombres entiers. Je l'ai donnée et démontrée au commencement de l'année 1829, à peu près comme le fait ci-dessus M. Serret (*Bulletin du Nord*, journal scientifique publié à Moscou); j'ai rappelé ce théorème et son application à la recherche de l'équation aux racines primitives dans mes Recherches sur les nombres (*Journal de Mathématiques*, tome II, page 258).

Si l'on observe que $x^{\frac{n}{a}} - 1$, $x^{\frac{n}{b}} - 1$ ont $x^{\frac{n}{ab}} - 1$ pour plus grand commun diviseur, que $x^{\frac{n}{a}} - 1$, $x^{\frac{n}{b}} - 1$, $x^{\frac{n}{c}} - 1$ ont $x^{\frac{n}{abc}} - 1$ pour plus grand commun diviseur, et ainsi des autres; en posant

$$\Pi_1 = \Pi\left(x^{\frac{n}{a}} - 1\right) = \left(x^{\frac{n}{a}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{b}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{c}} - 1\right)\ldots,$$

$$\Pi_2 = \Pi\left(x^{\frac{n}{ab}} - 1\right) = \left(x^{\frac{n}{ab}} - 1\right)\left(x^{\frac{n}{ac}} - 1\right)\ldots\left(x^{\frac{n}{bc}} - 1\right)\ldots,$$

$$\Pi_3 = \Pi\left(x^{\frac{n}{abc}} - 1\right) = \left(x^{\frac{n}{abc}} - 1\right)\ldots\left(x^{\frac{n}{bcd}} - 1\right)\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en prenant pour dénominateur de n dans Π_1 les nombres a, b, c, ..., dans Π_2 les combinaisons deux à deux, ou plutôt les produits ab, ac, ..., dans Π_3 les combinaisons ou produits trois à trois, tels que abc, abd, ..., le plus petit multiple des binômes $x^{\frac{n}{a}} - 1$, $x^{\frac{n}{b}} - 1$, ..., sera

$$X = \frac{\Pi_1 . \Pi_3 . \Pi_5 \ldots}{\Pi_2 . \Pi_4 . \Pi_6 \ldots},$$

et, par suite, l'équation aux racines primitives sera

$$(2)\quad \varphi_n(x) = \frac{(x^n - 1) . \Pi\left(x^{\frac{n}{ab}} - 1\right) . \Pi\left(x^{\frac{n}{abcd}} - 1\right) \ldots}{\Pi\left(x^{\frac{n}{a}} - 1\right) . \Pi\left(x^{\frac{n}{abc}} - 1\right) \ldots} = 0 \ (*).$$

Cette équation a été aussi donnée par M. Cauchy, en 1826, dans ses *Exercices de Mathématiques*.

3. Les remarques suivantes facilitent le calcul de la fonction $\varphi_n(x)$. Il suffit de les énoncer, la démonstration étant sans difficulté :

1°.
$$\varphi_{a^\alpha}(x) = \frac{x^{a^\alpha} - 1}{x^{a^{\alpha - 1}} - 1} = x^{a^{\alpha - 1}(a-1)} + x^{a^{\alpha - 1}(a-2)} + \ldots + x^{a^{\alpha - 1}} + 1;$$

2°.
$$\varphi_{a^\alpha b^\beta}(x) = \frac{\varphi_{a^\alpha}\left(x^{b^\beta}\right)}{\varphi_{a^\alpha}\left(x^{b^{\beta - 1}}\right)} = \frac{\varphi_{b^\beta}\left(x^{a^\alpha}\right)}{\varphi_{b^\beta}\left(x^{a^{\alpha - 1}}\right)};$$

3°.
$$\varphi_{a^\alpha b^\beta c^\gamma}(x) = \frac{\varphi_{a^\alpha b^\beta}\left(x^{c^\gamma}\right)}{\varphi_{a^\alpha b^\beta}\left(x^{c^{\gamma - 1}}\right)}; \text{ etc.}$$

(*) On lit en plusieurs endroits que l'équation aux racines primitives est irréductible ; la démonstration est bien connue pour le cas de n premier ou de $x^n = 1$; $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0$ est alors l'équation aux racines primitives.

Il serait bon d'indiquer d'une manière précise la démonstration générale relative au cas de n nombre composé.

et ainsi de suite,

$$4^{\circ}.\qquad \varphi_{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}}(x) = \varphi_{abc\ldots}\left(a^{\alpha-1}.\,b^{\beta-1}.\,c^{\gamma-1}\ldots\right);$$

5°. Pour $n = 2m$,

$$\frac{(x^m+1).\Pi\left(x^{\frac{m}{ab}}+1\right)\Pi\left(x^{\frac{m}{abcd}}+1\right)\ldots}{\Pi\left(x^{\frac{m}{a}}+1\right)\Pi\left(x^{\frac{m}{abc}}+1\right)\ldots}=0,\quad n = 2^{\lambda}a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots.$$

Cette dernière s'obtient au moyen de

$$\frac{x^{2k}-1}{x^k-1} = x^k + 1.$$

Sur les racines primitives de l'équation $x^{p-1} - 1 = py$, le nombre p supposé premier.

4. Cette équation est satisfaite par $x = 1, 2, 3, \ldots, p-1$. Si la racine a est telle que $a^k - 1$ soit la moindre puissance de a, qui, diminuée de l'unité, donne un reste divisible par p, la racine a appartiendra à l'exposant k, diviseur de $p-1$. Les *racines primitives* sont celles qui appartiennent à l'exposant $p-1$.

L'équation aux racines primitives est

$$\varphi_{p-1}(x) = py,$$

la fonction $\varphi_{p-1}(x)$ étant formée comme il a été dit plus haut. La démonstration s'établit facilement au moyen des propriétés communes aux équations

$$x^{p-1} - 1 = 0,\quad x^{p-1} - 1 = py.$$

Ces propositions d'algèbre supérieure, ces curiosités de la science, si l'on veut, n'appartenant point à l'enseignement des lycées, devraient naturellement trouver leur place dans l'enseignement des facultés; car l'expérience a prouvé que les curiosités de la science en deviennent assez souvent un jour des nécessités.

Les Tables de racines primitives, ou plutôt les Tables

d'indices correspondant aux nombres, et de nombres correspondant aux indices, pour un nombre premier donné, sont tellement utiles pour la résolution des équations numériques indéterminées, que l'illustre Jacobi s'est occupé de leur formation. Ces Tables ont été publiées à Berlin (*Impensis Academiæ litterarum regiæ Borussiæ*) (*).

Dans un ouvrage assez récent, M. Desmarest a donné quelques règles pour trouver, presque sans calcul, une racine primitive pour certaines classes de nombres premiers. Il est fâcheux que son ouvrage renferme, au sujet des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss, des assertions qui ne seront point acceptées par ceux qui auront lu avec attention cet ouvrage si justement célèbre.

Pour démontrer ces règles, il suffit de se rappeler les théorèmes suivants :

I. *L'équation* $x^{\frac{p-1}{2}}+1=py$ *est l'équation aux non-résidus quadratiques.*

II. *Si* $p=4q+1$, -1 *est résidu quadratique ;*
Si $p=4q+3$, -1 *est non-résidu quadratique ;*
Si $p=8k\pm 1$, 2 *est résidu quadratique ;*
Si $p=8k\pm 3$, 2 *est non-résidu quadratique.*

III. *Si* p *est résidu quadratique de* q, q *sera résidu quadratique de* p ;
Si p *est non-résidu quadratique de* q, q *sera non-résidu quadratique de* p.

On suppose ici p et q premiers impairs, l'un au moins étant de forme $4k+1$.

IV. *Les nombres premiers* p *et* q *étant tous deux de forme* $4k+3$,

---

(*) L'arithmologie a subi une nouvelle perte, cruelle, irréparable. EISENSTEIN est mort, jeune d'années, vétéran de la science. Nous y reviendrons.

Si p est résidu quadratique de q, q sera non-résidu quadratique de p, et réciproquement.

Ceci posé, on a ces théorèmes :

A. *Si $p = 2^i + 1$ est premier, tout non-résidu est racine primitive.* 3 *est toujours racine primitive.*

L'équation aux racines primitives est

$$x^{2^{i-1}} + 1 = py,$$

qui est aussi l'équation aux non-résidus

$$p = (3-1)^i + 1 = 3k + 2,$$

car

$$i = 2^m;$$

donc p non-résidu de 3, et 3 non-résidu de p.

B. *Si $p = 2^i a + 1$, l'équation aux racines primitives est*

$$\frac{x^{2^{i-1}a} + 1}{x^{2^{i-1}} + 1} = py;$$

les non-résidus sont racines primitives, en exceptant seulement ceux qui donneraient

$$x^{2^{i-1}} + 1 = py.$$

Application :

$$i = 1, \quad p = 2a + 1.$$

Tous les non-résidus sont racines primitives, sauf -1, qui satisfait à l'équation

$$x + 1 = py.$$

Pour

$$a = 4k + 1, \quad p = 8k + 3,$$

2 est non-résidu et racine primitive.

Pour

$$a = 4k + 3, \quad p = 8k + 7,$$

-2 est racine primitive.

Pour

$$i = 2, \quad p = 4a + 1,$$

$a = 2k + 1$ donnant

$$p = 8k + 5,$$

2 est racine primitive.

Si

$$2^2 + 1 = 5 = py,$$

il y a exception; cela arrive pour

$$p = 5;$$

si

$$i = 3, \quad p = 8a + 1;$$

pour

$$a = 3, \quad a = 6k + 1,$$

p n'est plus nombre premier; pour

$$a = 6k - 1, \quad p = 3k + 2 = (48k - 7),$$

p étant non-résidu de 3, 3 sera non-résidu de p, et, par suite, racine primitive; à moins que l'on n'ait

$$3^4 + 1 = 82 = 2.41 = py,$$

l'exception tombe sur

$$p = 41.$$

Il serait facile de multiplier les exemples.

Le théorème A est de M. Richelot. Les théorèmes pour

$$p = 2a + 1,$$

ou d'autres analogues, ont été donnés par M. Prouhet; les autres se trouvent dans l'ouvrage de M. Desmarest. Bien que je n'aie plus cet ouvrage entre les mains, je crois pouvoir assurer que la marche ici tracée peut faire trouver les règles que l'auteur y a données, et bien d'autres de même nature. On détermine un non-résidu quadratique du nombre premier p, et l'on fait voir qu'il est racine de l'équation aux racines primitives. Soient

$$R = py$$

l'équation aux racines primitives,

$$N = py$$

l'équation aux non-résidus quadratiques; on a

$$N = RQ.$$

Le non-résidu n, qui est racine de $N = py$, le sera aussi de $R = py$, si $Q = py$ n'a pas n pour racine.

SOLUTION DE LA QUESTION 241

(voir t. X, p. 387);

PAR M. TH. LOXHAY,
Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

Soit

$$T_{n+2} = aT_{n+1} - bT_n,$$

équation caractéristique d'une série récurrente; on a

$$\frac{T_{n+1}^2 - aT_nT_{n+1} + bT_n^2}{b^n} = \textit{constante}. \qquad \text{(EULER.)}$$

Solution. L'échelle de relation de la série récurrente étant composée de deux termes, on sait que la fraction génératrice aura la forme $\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2}$; cette fraction pourra se décomposer en deux fractions partielles, $\frac{A}{x - p}$ et $\frac{B}{x - q}$; de sorte que l'on aura

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2} = \frac{A}{x - p} + \frac{B}{x - q},$$

avec les relations

$$A = \frac{\beta p + \alpha}{p - q}, \quad B = -\frac{\beta q + \alpha}{p - q}, \quad p + q = \beta', \quad pq = \alpha'.$$

Pour déterminer les quantités a et b, il faut remarquer que le terme général de la série récurrente est donné par la formule

$$T_n = -\left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right),$$

et, par suite,

$$T_{n+1} = -\left(\frac{A}{p^{n+1}} + \frac{B}{q^{n+1}}\right),$$

$$T_{n+2} = -\left(\frac{A}{p^{n+2}} + \frac{B}{q^{n+2}}\right).$$

Subtituant ces valeurs dans l'équation caractéristique, on aura

$$\frac{A}{p^{n+2}} + \frac{B}{q^{n+2}} = a\left(\frac{A}{p^{n+1}} + \frac{B}{q^{n+1}}\right) - b\left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right),$$

mais ce résultat devant subsister pour toutes les valeurs imaginables de A et B, on obtiendra, en égalant séparément les coefficients de ces quantités à zéro,

$$1 - ap + bp^2 = 0, \quad 1 - aq + bq^2 = 0;$$

d'où

$$a = \frac{p+q}{pq}, \quad b = \frac{1}{pq}.$$

Si l'on multiplie successivement T_n par $\frac{1}{p}$ et par $\frac{1}{q}$, et que l'on retranche des deux produits T_{n+1}, il viendra

$$\frac{T_n}{p} - T_{n+1} = -\frac{B}{q^n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{T_n}{q} - T_{n+1} = -\frac{A}{p^n}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right);$$

multipliant encore ces deux résultats l'un par l'autre, on aura

$$\frac{T_n^2}{pq} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)T_n T_{n+1} + T_{n+1}^2 = -\frac{BA}{p^n q^n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2;$$

puis, en remplaçant $\frac{p+q}{pq}$ par a, $\frac{1}{pq}$ par b, et $\frac{1}{p^n q^n}$ par b^n.

$$\frac{b\mathrm{T}_n^2 - a\mathrm{T}_n\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n+1}^2}{b^n} = -\mathrm{BA}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 = \textit{constante}.$$

SUR LES SYSTÈMES DE COURBES ALGÉBRIQUES PLANES QUI SE COUPENT ORTHOGONALEMENT ET SUR LEUR CONFOCALITÉ;

D'après M. le professeur E.-E. KUMMER.

(Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 5; 1847.)

---

1. Soit

$$(a) \qquad f(x, y, \alpha) = 0$$

une courbe plane algébrique de degré n en α, à coordonnées rectangulaires; α est un paramètre variable: soit (X, Y) un point quelconque dans le plan des courbes, la courbe (a) passera par ce point, si nous posons

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \alpha) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)\ldots(\alpha - \alpha_n) = 0;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de l'équation, et fonctions de X, Y; à chacune de ces racines correspond une courbe donnée par l'équation (a), et ces n courbes passent par le point (X, Y); en les prenant deux à deux, on a $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes de deux courbes. Parmi ces systèmes, considérons ceux où les deux courbes se coupent orthogonalement. Supposons que ce soient les courbes correspondant aux racines α_1, α_2, et prenons l'équation

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) = 0,$$

ou bien

$$u\alpha^2 + v\alpha + w = 0;$$

u, v, w sont des fonctions généralement irrationnelles de X, Y. Divisant par u, et posant

$$\frac{v}{u} = 2z, \quad \frac{w}{u} = -z_1^2,$$

on a

(1) $$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0$$

(on verra plus loin pourquoi on introduit $+z_1^2$); z et z_1 sont des fonctions de X, Y ou de x, y, puisque la courbe (a) passe par le point (X, Y). Il s'agit de déterminer les fonctions z, z_1 de telle sorte, que les deux courbes (α_1, α_2) se coupent orthogonalement. Faisons

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dz_1 = p_1\,dx + q_1\,dy,$$

et différentions l'équation (1) par rapport à x et à y; nous en tirerons

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha_1 - q_1 z_1}.$$

A raison de l'orthogonalité, les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à α_1, α_2, multipliées ensemble, doivent donner -1; exécutant la multiplication, et remplaçant $\alpha + \alpha_1$ par $-2z$ et $\alpha_1\alpha_2$ par $-z_1^2$, on obtient

(3) $$z_1(p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2) - 2z(pp_1 + qq_1) = 0.$$

Si l'on pouvait intégrer généralement cette équation aux différences partielles, on aurait z et z_1 en fonction de x, y, et ces valeurs, étant mises dans l'équation (1), donneraient le système des couples de courbes à intersections orthogonales. Mais cette intégrale générale n'est pas encore trouvée; cherchons des solutions particulières.

2. Posons

(4) $$p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2 = 0, \quad pp_1 + qq_1 = 0;$$

éliminant q_1, on a

$$q^2 = p_1^2.$$

Ainsi

$$p_1 = \pm q \quad \text{et} \quad q_1 = \mp p.$$

Différentiant la première de ces équations par rapport à y, et la seconde par rapport à x, on a

$$s'_1 = \pm t, \quad s'_1 = \mp r,$$

où r, s, t, r', s', t' sont, d'après les notations, les coefficients différentiels de z et x_1 ; donc

$$r + t = 0.$$

L'intégrale complète de cette équation est

$$(5) \quad z = f(x + iy) + f(x - iy) - i\mathrm{F}(x + iy) + i\mathrm{F}(x - iy)$$

(Lacroix, *Calcul différentiel*, t. II, p. 583, 2[e] édition ; 1814).

On a

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{dz_1}{dy};$$

d'où l'on tire

$$(6) \quad z_1 = if(x + iy) - if(x - iy) + \mathrm{F}(x + iy) - \mathrm{F}(x - iy).$$

On omet le double signe, qui n'importe pas à notre sujet ;

$$i = \sqrt{-1}.$$

Ces valeurs de z et z_1 satisfont à l'équation (3), et aussi à l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha z - z_1^2 = 0.$$

Posons

$$f(x + iy) = \frac{1}{2}(x + iy) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x + iy) = 0;$$

on obtient

$$\alpha^2 + 2\alpha x - y^2 = 0;$$

système de paraboles biconfocales.

Donnant à α des valeurs quelconques, on obtient des courbes dont les intersections sont ou réelles ou imaginaires, et aux points d'intersection on a toujours le produit des $\frac{dy}{dx}$ respectifs égal à -1; ce qui donne une véritable intersection orthogonale, lorsque l'intersection est réelle. Nous ne répéterons plus cette observation.

Si l'on pose

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}a(x+iy)^m, \quad F(x+iy) = \frac{1}{2}b(x+iy)^n,$$

et passant aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

on arrive à l'équation suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + 2\alpha(a\rho^m \cos m\varphi + b\varphi^n \sin n\varphi) \\ \quad - (a\rho^m \sin m\varphi - b\rho^n \cos n\varphi) = 0. \end{array} \right.$$

3. Passons à une autre intégrale particulière de l'équation (3). A cet effet, considérons z comme une fonction de z_1 et d'une nouvelle variable z_2 à déterminer ultérieurement; faisons

$$dz_2 = p_2\,dx + q_2\,dy;$$

alors

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{dz}{dz_1}p_1 + \frac{dz}{dz_2}p_2, \quad \frac{dz}{dy} = q = \frac{dz}{dz_1}q_1 + \frac{dz}{dz_2}q_2.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation (3), on a

$$\left[z_1\left(\frac{dz}{dz_1}\right)^2 - z_1 - 2z\frac{dz}{dz_1}\right](p_1^2+q_1^2) + z_1\left(\frac{dz}{dz_2}\right)^2(p_2^2+q_2^2)$$
$$+ z\left(z\frac{dz}{dz_1}\frac{dz}{dz_2} - z\frac{dz}{dz_2}\right)(p_1p_2+q_1q_2) = 0.$$

Si l'on pose

$$p_1p_2 + q_1q_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0$$

(système dont l'intégrale est connue), l'équation se réduit à

$$(8) \qquad z_1\left[\left(\frac{dz}{dz_1}\right)^2+\left(\frac{dz}{dz_2}\right)^2-1\right]-2z\frac{dz}{dz_1}=0,$$

qui donne immédiatement l'intégrale particulière

$$2z=1-z_1^2-z_2^2;$$

d'où l'on déduit le nouveau système de courbes se coupant orthogonalement,

$$\alpha^2-2\alpha(1-z_1^2-z_2^2)-z_1^2=0,$$

ou bien

$$(9) \qquad \frac{z_1^2}{\alpha}+\frac{z_2^2}{\alpha+1}=1,$$

où z_1 a la forme de z dans l'équation (5), et z_2 la forme de z_1 dans l'équation (6).

Si l'on fait

$$f(x+iy)=\frac{1}{2}(x+iy) \quad \text{et} \quad F(x+iy)=0,$$

on a

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha+1}=1.$$

Faisons

$$f(x+iy)=\frac{1}{2}(x+iy)^m, \quad F(x+iy)=\frac{1}{2}b(x+iy)^n,$$

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi;$$

nous obtiendrons

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a\rho^m\cos m\varphi+b\rho^n\cos n\varphi)^2}{\alpha}\\ &+\frac{(a\rho^m\sin m\varphi+b\rho^n\sin n\varphi)^2}{\alpha+1}=1,\end{aligned}\right.$$

équation qui fournit une classe de courbes orthogonales dont les coniques font partie.

4. Les méthodes connues fournissent l'intégrale géné-

rale de l'équation (8) (*voir* Lacroix, *Calcul différentiel*, t. II, p. 547-550; 2e édition; 1814). Cette intégrale est le résultat de l'élimination de c entre les deux équations

$$(11)\quad \begin{cases} 2cz - c_2 z_1^2 - [cz_2 - \varphi(c)]^2 + 1 = 0, \\ z - cz_1^2 - [cz_2 + \varphi(c)]\,[z_2 + \varphi'(c)] = 0, \end{cases}$$

où $\varphi(c)$ est une fonction arbitraire, et où

$$\varphi'(c) = \frac{d\varphi(c)}{dc}.$$

Éliminant z entre les deux équations (11), et substituant la valeur de z tirée de la seconde de ces équations, dans l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0,$$

on a

$$(12)\quad \begin{cases} c_2 z_1^2 + [cz_2 + \varphi(c)]\,[cz_2 + 2c\varphi'(c) - \varphi(c)] + 1 = 0, \\ \alpha^2 + 2\alpha[cz_1^2 + cz_2 + \varphi(c)]\,[z_2 + \varphi'(c)] - z_1^2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on élimine c, et si l'on met les valeurs de z_1 et z_2 en x, y données ci-dessus, on a une équation renfermant les trois fonctions arbitraires $f(x+iy)$, $F(x+iy)$ et $\varphi(c)$. On peut parvenir encore à d'autres systèmes de courbes à intersections orthogonales par divers modes d'intégrations, plus ou moins compliquées, de l'équation (3). Nous ne nous y arrêtons pas, et nous ferons l'observation suivante.

5. Nous avons déduit des deux équations spéciales

$$\alpha^2 + 2\alpha z_1 - z_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{z_1^2}{\alpha} + \frac{z_2^2}{\alpha+1} = 1,$$

les équations des courbes

$$\alpha^2 - 2\alpha x - y^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha+1} = 1 \quad (\S\S\ 2 \text{ et } 3).$$

On passe donc de ce système au précédent en rempla-

çant x par z_1 et y par z_2. Ce remplacement a lieu dans le cas général.

En effet, soient u et u_1 deux fonctions de x et y, et supposons que

$$\varphi^2 + 2\alpha u - u_1^2 = 0$$

représente un système de courbes à intersections orthogonales; on a, d'après l'équation (3) du § 1,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 - \left(\frac{du_1}{dx}\right) - \left(\frac{du_1}{dy}\right)^2\right] \\ &\qquad - 2u\left(\frac{du}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{du_1}{dx}\frac{du_1}{dy}\right) = 1, \end{aligned}\right.$$

et, réciproquement, lorsque cette équation subsiste, l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha u - u_1^2 = 0$$

représente un tel système. Supposons, maintenant, que u et u_1 sont des fonctions de z_1 et z_2, et faisons, comme ci-dessus,

$$dz_1 = p_1\,dx + q_1\,dy, \quad dz_2 = p_2\,dx + q_2\,dy;$$

alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz_1}p_1 + \frac{du}{dz_2}p_2, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dz_1}q_1 + \frac{du}{dz_2}q_2,$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{dz_1}p_1 + \frac{du_1}{dz_2}p_2, \quad \frac{du_1}{dy} = \frac{du_1}{dz_1}q_1 + \frac{du_1}{dz_2}q_2.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (13), et faisant usage des deux équations

$$p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0, \quad p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0,$$

on obtient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &\left[\left(\frac{du}{dz_1}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz_2}\right)^2 - \left(\frac{du_1}{dz_1}\right)^2 - \left(\frac{du_1}{dz_2}\right)^2\right] \\ &\qquad - 2u\left(\frac{du}{dz_1}\frac{du_1}{dz_1} + \frac{du}{dz_2}\frac{du_1}{dz_2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation se déduit de l'équation (13), en remplaçant x par z_1 et y par z_2 ; c'est ce qu'il s'agissait de faire voir.

5. M. Plucker appelle *foyers* d'une courbe, des points tels, qu'en menant par ces points des tangentes à la courbe, il y ait au moins deux tangentes faisant avec l'axe des x (par conséquent avec une droite quelconque) des angles dont les tangentes trigonométriques soient $+i$ et $-i$. On suppose d'ailleurs les axes rectangulaires. Nous avons vu que, dans le système de coniques à intersections rectangulaires, les courbes ont toutes les mêmes foyers ; et si nous adoptons la définition de M. Plucker, la même propriété a lieu, en général, pour tout système analogue. Dans un tel système, les courbes infiniment voisines ne doivent pas avoir d'intersections réelles ; car, en ces points, les courbes ne se couperaient pas à angle droit, mais à angle *nul*; en d'autres termes, un tel système de courbes ne peut pas avoir d'*enveloppe* réelle. C'est pour cette raison que nous avons introduit le carré négatif $-z_1^2$ dans l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0,$$

où z et z_1 sont des fonctions de x et y ; que ces fonctions soient soumises ou non aux formes (5) et (6), pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer α entre cette équation et sa dérivée

$$\alpha + z = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$z_2 + z_1^2 = 0.$$

Cette équation est celle d'une surface imaginaire qui passe par les *points* donnés par les équations simultanées

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0;$$

points qui sont les mêmes pour tout le système, et qui sa-

tisfont aux conditions de focalité établies par M. Plucker.

En effet, soient les deux courbes du système

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0, \quad \beta^2 + 2\beta z - z_1^2 = 0,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha - q_1 z_1} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p\beta - p_1 z_1}{q\beta - q_1 z_1};$$

et aux points d'intersections réelles ou imaginaires de ces deux courbes, le produit des deux coefficients différentiels doit être égal à -1; par conséquent, lorsque β diffère infiniment peu de α, on a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1};$$

et cela pour les points où les courbes infiniment rapprochées se coupent, par conséquent, dans tous les points donnés de l'enveloppe; donc, aux points donnés par les équations simultanées

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0,$$

les tangentes aux courbes du système font, avec l'axe des x, des angles dont les tangentes trigonométriques sont $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; ce qui caractérise des foyers.

SUR UNE PROPRIÉTÉ NOUVELLE DE L'ÉQUATION QUI SERT A DETÉRMINER LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES

(voir t. X, p. 258);

PAR M. J. SYLVESTER,
Avocat, anciennement professeur à Londres.

---

1. *Note du rédacteur.* Cette propriété étant fondée sur les *déterminants,* nous croyons utile, pour les jeunes lecteurs du Journal, de donner quelques explications pré-

liminaires. Soient n^2 quantités quelconques disposées n à n sur n lignes horizontales et sur n *colonnes* verticales. Cette disposition est le *type* d'un déterminant *carré*, et lorsqu'on applique à ces quantités la règle connue de Cramer, pour former les dénominateurs, dans la résolution des équations du premier degré, on aura, en général, lorsqu'il n'y a lieu ni à réduction ni à annulation, une expression formée de $n!$ termes; c'est le *déterminant développé* ou la valeur du *déterminant*.

2. *Notation*. L'expression $a_{l,c}$, où les indices l, c peuvent avoir toutes les valeurs 1, 2, 3,..., n, indique un terme quelconque du type; la lettre l donne le quantième de la ligne, et la seconde lettre c le quantième de la colonne.

Lorsqu'on a deux types formés chacun de n^2 quantités, on peut représenter les termes généraux respectifs par $a_{l,c}$, $b_{l,c}$; et ainsi de suite.

3. *Multiplication de déterminant*. Pour fixer les idées, prenons $n = 3$, et écrivons les deux déterminants

$$\begin{array}{ccc|ccc} & \mathrm{M} & & & \mathrm{N} & \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} & b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} & b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3}, \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} & b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3}. \end{array}$$

Faisons

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= a_{1,1}\, b_{1,1} + a_{2,1}\, b_{2,1} + a_{3,1}\, b_{3,1}, \\ A_{2,1} &= a_{1,1}\, b_{1,2} + a_{2,1}\, b_{2,2} + a_{3,1}\, b_{3,2}, \\ A_{3,1} &= a_{1,1}\, b_{1,3} + a_{2,1}\, b_{2,3} + a_{3,1}\, b_{3,3}. \end{aligned}$$

On a formé $A_{1,1}$ en multipliant chaque terme de la première colonne du déterminant M par le terme correspondant de la première colonne du déterminant N; multipliant les termes de la première colonne de M avec chaque terme de la deuxième colonne de N, on a formé $A_{2,1}$, et de même de $A_{3,1}$; pour former $A_{1,2}$, $A_{2,2}$, $A_{3,2}$, on mul-

tiplie chaque terme de la seconde colonne de M successivement par les termes correspondants de la première, deuxième et troisième colonne de N; on forme ainsi le déterminant

$$\begin{matrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3}, \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3}. \end{matrix}$$

C'est dans cette opération que consiste ce qu'on appelle la *multiplication de deux déterminants*. Quand on a trois déterminants, on peut former le produit des deux premiers, et ensuite multiplier ce produit par le troisième, et ainsi de suite. On ne parvient pas au même résultat en prenant les déterminants dans un ordre quelconque.

Exemple :

$$\text{déterm.}\left\{\begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix} \times \begin{matrix} e, & f \\ g, & h \end{matrix}\right\} = \text{déterm.}\left\{\begin{matrix} ae + cg, & be + dg, \\ af + ch, & bf + dh; \end{matrix}\right.$$

$$\text{déterm.}\left\{\begin{matrix} e, & f \\ g, & h \end{matrix} \times \begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix}\right\} = \text{déterm.}\left\{\begin{matrix} ae + cg, & af + ch, \\ be + dg, & bf + dh. \end{matrix}\right.$$

Les déterminants ne sont pas les mêmes quant à la position; et si l'on multiplie par un troisième déterminant, on n'aura pas le même résultat, selon que l'on prend une forme ou l'autre.

Lorsque les déterminants sont égaux, le produit se nomme *élévation de puissance*.

Observation. Au lieu de multiplier *colonne* par *colonne*, on peut multiplier *ligne* par *ligne*; le mot *multiplier* étant pris dans le même sens que ci-dessus.

4. Théorème. *Soient les deux déterminants* $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, *chacun de* n^2 *termes, formant le déterminant produit* $a_{l,c}$, $b_{l,c}$; *soient* M_1 *et* M_2 *les déterminants développés des deux facteurs, et* P *le déterminant développé du produit, on a*

$$P = M_1 M_2.$$

Si l'on a plusieurs déterminants $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_r$, *toujours de même espèce* (n^2), *on a*

$$P = M_1 M_2 M_3 \ldots M_r.$$

Si les déterminants sont égaux, on a

$$P = (M_1)^r.$$

Exemple : Soient

$$\text{déterminant} \begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix} = M,$$

$$\text{déterminant} \begin{Bmatrix} e, & f \\ g, & h \end{Bmatrix} = N;$$

multipliant, on obtient le déterminant

$$\begin{Bmatrix} ae + cg, & be + dg \\ af + ch, & bf + dh \end{Bmatrix} = P;$$

$$M = ad - bc,$$
$$N = eh - gf,$$
$$\therefore P = (ae + cg)(bf + dh) - (be + dg)(af + ch);$$

exécutant les multiplications, on a

$$P = MN.$$

5. *Déterminant symétrique.* Si, dans un déterminant $a_{l,c}$, on a

$$a_{l,c} = a_{c,l},$$

les termes en diagonale de gauche à droite sont uniques; tous les autres termes sont doubles et disposés symétriquement par rapport à la diagonale.

Exemple :

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ b, & d, & f, \\ c, & f, & e, \end{matrix}$$

représente un déterminant symétrique.

6. Théorème. *Le produit de déterminants symétriques est un déterminant symétrique.*

7. Théorème de M. Sylvester. *Soit le déterminant carré symétrique*

$$(\mathrm{M})\qquad \left\{\begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2},\ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2},\ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2},\ldots, & a_{n,n}, \end{matrix}\right.$$

dans lequel on a, d'après la définition,

$$a_{l,e} = a_{e,l}.$$

Élevant le déterminant à la puissance p, on obtient le déterminant

$$(\mathrm{N})\qquad \left\{\begin{matrix} \mathrm{A}_{1,1}, & \mathrm{A}_{1,2},\ldots, & \mathrm{A}_{1,n}, \\ \mathrm{A}_{2,1}, & \mathrm{A}_{2,2},\ldots, & \mathrm{A}_{2,n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{A}_{n,1}, & \mathrm{A}_{n,2},\ldots, & \mathrm{A}_{n,n}; \end{matrix}\right.$$

et ce déterminant est symétrique aussi (§ 6) *par rapport à la diagonale* $\mathrm{A}_{1,1}, \mathrm{A}_{2,2},\ldots, \mathrm{A}_{n,n}$; *retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique de* (M) *la même quantité* λ, *on obtient le déterminant*

$$(\mathrm{P})\qquad \left\{\begin{matrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2},\ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}-\lambda,\ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2},\ldots, & a_{n,n}-\lambda. \end{matrix}\right.$$

Développant ce déterminant et ordonnant par rapport à λ, *on obtient une expression qui, étant égalée à zéro, donne l'équation*

$$(1)\qquad \lambda^n - f\lambda_{n-1} + g\lambda_{n-2} + \ldots (-1)^n t = 0;$$

équation qui a n racines réelles (*voir* t. X, p. 259).

Retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique du déterminant (N) *la quantité* μ, *et opérant comme ci-dessus, on parvient à l'équation*

$$(2)\qquad \mu^n - \mathrm{F}\mu^{n-1} + \mathrm{G}\mu^{n-2} + \ldots (-1)^n \mathrm{T} = 0;$$

équation qui a aussi n racines réelles. Les racines de cette équation sont les racines de l'équation (1), élevées chacune à la puissance p.

Démonstration. Représentons par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \ldots, \quad \rho_p$$

les p racines de l'équation $\rho^p - 1 = 0$. Écrivons le déterminant

$$\begin{array}{llll} a_{1,1} - \rho_q\lambda, & a_{1,2}, \ldots, & & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2} - \rho_q\lambda, \ldots, & & a_{2,n}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots\ldots\ldots, & & & a_{n,n} - \rho_q\lambda; \end{array}$$

et faisons q égal successivement à tous les nombres de la suite 1, 2, 3,..., p, on aura p déterminants; le produit de tous ces déterminants reste évidemment le même dans quelque ordre qu'on prenne ces déterminants, et, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, tous les termes en ρ qui ne seront pas élevés à une puissance p disparaîtront, et λ accompagnant toujours ρ, il ne reste donc que des λ^p, et le déterminant-produit sera

$$(\mathrm{Q}) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} A_{1,1} - \lambda^p, & A_{1,2}, & A_{1,3}, \ldots, & A_{1,n}, \\ A_{2,1}, \ldots, & A_{2,2} - \lambda^p, \ldots\ldots, & & A_{2,n}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, \ldots\ldots, & & A_{n,n} - \lambda^p; \end{array} \right.$$

où, faisant abstraction de λ, on a le déterminant (N). Ainsi

$$\mu = \lambda^p. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

7. *Application.*

$$n = 2, \quad \text{et} \quad p = 2;$$

$$(\mathrm{M}) \qquad \text{déterminant} \left\{ \begin{array}{ll} a, & b, \\ b, & c. \end{array} \right.$$

élevant ce déterminant au carré, on a

(N) $$\begin{cases} a^2+b^2, & ab+bc, \\ ab+bc, & b^2+c^2, \end{cases}$$

(P) $$\text{déterminant} \begin{cases} a-\lambda, & b, \\ b, & c-\lambda, \end{cases}$$

(1) $$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0,$$

$$\text{déterminant} \begin{cases} a^2+b^2-\mu, & ab+bc, \\ ab+bc, & b^2+c^2-\mu, \end{cases}$$

(2) $$\mu^2-(a^2+c^2+2b^2)\mu+(ac-b^2)^2=0 \quad \text{ou} \quad \mu=\lambda^2.$$

Faisons

$$n=2, \quad p=3,$$

(M) ne change pas, et l'on a

(N) $$\begin{cases} a^3+2ab^2+b^2c, & a^2b+abc+b^3+bc^2, \\ a^2b+abc+b^3+b^2c, & ab^2+2b^2c+c^3; \end{cases}$$

le déterminant (P) et l'équation (1) restent les mêmes; mais l'équation (2) devient

$$\mu^2-(a^3+c^3+3ab^2+3cb^2)\mu+(ac-b^2)^3=0$$

où

$$\mu=\lambda^3;$$

car, λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation (1), on a

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3=a^3+c^3+3ab^2+3cb^2, \quad \lambda_1^3+\lambda_2^3=(ac-b^2)^3.$$

8. M. Sylvester fait observer que son théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, démontré par M. Borchardt, pour des déterminants quelconques, et qui devient le théorème démontré ci-dessus, lorsque le déterminant est symétrique (*Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 63; 1847).

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez M. Bachelier, libraire, quai des Augustins, n° 55.

Traité de Géométrie supérieure; par M. *Chasles*, Membre de l'Institut, Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris. Un beau volume in-8° de LXXXIV-602 pages et 12 planches. Paris, 1852; imprimerie de Bachelier.

Nous n'avons pas besoin d'apprendre à nos lecteurs combien la Géométrie doit au zèle et au talent de M. Chasles. Nos recueils scientifiques renferment une foule de beaux Mémoires, dans lesquels le célèbre professeur de la Sorbonne nous a révélé de nombreux et importants théorèmes, et, ce qui vaut mieux, des théories aussi remarquables par leur simplicité que par leur fécondité.

Mais il ne suffit pas de découvrir des propositions nouvelles : il faut encore, lorsqu'elles sont assez nombreuses pour changer l'aspect de la science, marquer leur place parmi les propositions anciennement connues, et former des unes et des autres un ensemble où tout se coordonne sans lacune, sans disparate. Tel est le but que s'est proposé M. Chasles, dans l'ouvrage dont nous allons rendre compte. L'auteur ne s'est pas borné à recueillir ses propres travaux et ceux de ses devanciers ou de ses contemporains : il y a joint de notables perfectionnements, et fait faire à la science de nouveaux progrès.

Le *Traité de Géométrie supérieure* est partagé en quatre sections et trente-cinq chapitres.

La première section est consacrée aux principes fondamentaux, c'est-à-dire, aux théories du rapport an-

harmonique, de la division homographique et de l'involution.

M. Chasles débute par un de ces perfectionnements dont nous parlions tout à l'heure. Il avertit que dans le cours de l'ouvrage il désignera par les signes + et —, le sens des segments rectilignes comptés sur la même direction et des angles décrits autour du même sommet. Un respect superstitieux pour la Géométrie des Anciens, joint à une sorte de préjugé sur la séparation absolue des méthodes dites synthétique et analytique, avaient empêché jusqu'ici les géomètres d'adopter cette utile convention. Les Anciens, par la nature des sujets qu'ils traitaient, ont pu s'en passer; mais les Modernes, en abordant des questions plus vastes, se sont trouvés bientôt exposés à l'un ou l'autre de ces deux inconvénients : ou ne démontrer un théorème que pour un état particulier de la figure et étendre la conclusion aux autres états par analogie; ou bien accompagner chaque démonstration de l'examen de tous les cas particuliers. La première marche est dénuée de toute rigueur : la seconde, qui d'ailleurs n'est pas toujours praticable, est longue et embarrassée, et elle use inutilement les forces de l'esprit à des détails minutieux et sans intérêt. L'adoption du principe des signes fait disparaître ces inconvénients : il suffit d'établir d'abord quelques propositions très-simples, qui impliquent par elles-mêmes ce principe qu'elles conservent et transmettent ensuite dans toutes les déductions ultérieures. On peut alors raisonner sur l'état général d'une figure, comme en analyse, ou plutôt c'est de l'analyse véritable, non plus restreinte à l'étude des lieux géométriques, mais appliquée à toutes les parties de la Géométrie où son emploi apporte des simplifications.

Un autre emprunt fait à l'analyse permet à M. Chasles de donner aux questions géométriques une généralité

encore plus grande : je veux parler de la notion des points et droites imaginaires, artifice ingénieux qui diminue le nombre des énoncés et réunit dans une même classe des propositions de nature très-diverse. Mais certaines méthodes font naître des découvertes avec si peu d'effort, qu'on s'est abandonné quelquefois au plaisir d'accumuler des théorèmes nouveaux sans s'inquiéter beaucoup de la rigueur et de l'ordre logique. C'est ainsi qu'on a souvent employé les imaginaires sans les bien définir, et qu'on a fondé plusieurs démonstrations sur un prétendu principe de continuité qui n'est véritablement qu'une forte induction. Le talent profondément philosophique de M. Chasles lui a fait éviter ces écueils. Nous ne pouvons mieux faire que de citer ici ses propres paroles :

« Une étude attentive des différents procédés de démonstration qui peuvent s'appliquer à une même question, m'a convaincu qu'à côté d'une démonstration facile, fondée sur quelques propriétés accidentelles ou contingentes d'une figure, devaient s'en trouver toujours d'autres, fondées sur des propriétés absolues et subsistantes dans tous les cas que peut présenter la figure, en raison de la diversité de position de ses parties ; et j'ai éprouvé que la recherche de ces démonstrations complétement rigoureuses, est d'autant plus utile qu'elle met nécessairement sur la voie des propositions les plus importantes, de celles qui établissent tous les liens qui doivent exister entre les différentes parties d'un même sujet....

» Ces démonstrations deviennent *aussi faciles que les premières,* quand on a préparé la voie par la recherche de quelques propositions d'une certaine nature ; savoir, de propositions reposant sur les propriétés *absolues* ou *permanentes* de la figure et non simplement sur ses propriétés *contingentes*. Ces propositions se distinguent par ce caractère spécial, que les objets susceptibles de devenir ima-

ginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentés par des *éléments* réels, de même que les racines d'une équation n'entrent pas par elles-mêmes dans les calculs de la géométrie analytique, et y sont représentées collectivement par les coefficients de l'équation. »

Malgré ces bonnes raisons, il est à craindre qu'un long temps ne s'écoule avant que l'on adopte franchement les imaginaires en géométrie. Cela tient, croyons-nous, à des préjugés, à des répugnances qui s'évanouiraient si l'on étudiait avec plus d'attention les procédés naturels et spontanés de l'esprit humain. On cesserait alors de s'étonner de bien des choses; ou plutôt, on ne s'étonnerait plus que d'une seule, d'avoir, comme M. Jourdain, fait longtemps de la prose sans le savoir. Et, en effet, les locutions algébriques, en ce qui concerne les imaginaires, ne sont pas aussi éloignées du langage habituel qu'on pourrait le croire. Lorsqu'on raisonne dans *un certain ordre d'idées*, à l'aide d'expressions empruntées à un *autre ordre*, les *opérations* de l'esprit sont alors purement *symboliques*, n'ont, prises à la lettre, aucune *réalité*, et cependant elles conduisent à des conclusions exactes, quand on a bien marqué le sens et les limites de cette correspondance singulière qui existe entre les deux ordres d'idées. A ce point de vue, on peut considérer les imaginaires comme le langage figuré des mathématiques, et il est sans doute aussi déraisonnable d'en priver la géométrie qu'il le serait de vouloir supprimer, dans le discours, toute expression métaphorique.

Outre les avantages qui résultent de l'emploi judicieux des signes + et —ı et des imaginaires bien définies, les théories exposées dans ce livre présentent encore un troisième caractère de généralité. Elles s'appliquent indifféremment et avec la même facilité aux deux genres de pro-

positions que l'on peut distinguer dans la science de l'étendue, selon qu'elles se rapportent à des points ou à des droites : propositions qui se correspondent en vertu de certaines lois, auxquelles on a donné le nom de *principe de dualité;* en sorte qu'il n'est plus nécessaire de recourir, pour passer des unes aux autres, aux méthodes de transformation des figures. Ce n'est pas que ces dernières méthodes ne soient fort utiles et ne mettent souvent sur la voie de bien des découvertes; mais elles ne satisfont pas complétement aux besoins de la science et ne peuvent suppléer à des démonstrations directes.

Nous venons de traiter assez longuement quelques points auxquels M. Chasles attache, avec raison, une grande importance. Ne pouvant consacrer la même étendue au reste de l'ouvrage, nous nous contenterons d'en donner le sommaire.

La seconde section renferme les applications des trois théories fondamentales à la démonstration des propriétés des figures rectilignes. On y trouve les propositions les plus utiles sur le triangle, le quadrilatère et les polygones; divers modes de description d'une ligne droite par points; la théorie des transversales; les centres des moyennes distances et des moyennes harmoniques. Des formules pour la résolution des équations et pour la décomposition des fractions rationnelles, y sont données comme conséquences de théories purement géométriques.

La troisième section contient la théorie prise d'un point de vue très-général, des systèmes de coordonnées servant à exprimer la position d'un point ou celle d'une droite; la théorie générale de la transformation des figures, soit en figures du même genre appelées *figures homographiques,* dans lesquelles des points correspondent à des points et des droites à des droites, soit en figures de genre différent, appelées *figures corrélatives,* dans les-

quelles des points correspondent à des droites et des droites à des points.

La quatrième section traite des cercles. On y trouve la théorie des pôles et polaires, celle des axes radicaux et les propriétés de quelques polygones inscrits ou circonscrits. Des théorèmes relatifs au cône à base circulaire et aux fonctions elliptiques terminent le volume.

Tel est, dans son ensemble, le *Traité de Géométrie supérieure,* véritable monument élevé à la science de l'étendue, empreint de cette forte unité qui est le caractère distinctif des œuvres capitales. Est-il besoin d'ajouter que le style est partout clair et élégant, que les démonstrations simples et naturelles se suivent sans effort? M. Chasles n'avait garde de se défaire de ses qualités habituelles dans un ouvrage destiné à perpétuer son nom.

Nous espérons que M. Chasles voudra bien tenir le plus tôt possible la promesse qu'il fait *implicitement* en plusieurs endroits, de nous donner une exposition complète des propriétés des lignes et des surfaces courbes. Ce sera un service important rendu à la science et un nouveau titre à la reconnaissance des géomètres.

Après avoir montré la valeur scientifique de ce beau volume, nous en signalerons encore le mérite typographique. La netteté de l'impression, l'élégante disposition des formules, la correction du texte ne laissent véritablement rien à désirer. Il faut en savoir d'autant plus de gré à M. Bachelier et à son habile prote M. Bailleul, que l'impression des ouvrages de mathématiques offre des difficultés spéciales dont on ne vient à bout qu'à force de soins minutieux, de patiente attention. Nous n'insisterons pas davantage, car nos lecteurs ont sans doute souvent pu juger par eux-mêmes de ce que l'on doit attendre d'un éditeur consciencieux et jaloux de sa réputation.

(E. Prouhet.)

Note. *L'analyse et la synthèse* sont deux modes de raisonnements qu'on rencontre partout, dans la Géométrie aussi bien que dans l'Algèbre. Ce qui distingue ces deux sciences l'une de l'autre, ce sont leurs moyens d'investigation. La Géométrie est *graphique;* elle s'adresse à la fois à l'*œil extérieur* et à l'*œil intérieur* (l'intelligence). De là, une grande facilité de conception, une extrême clarté. L'Algèbre est *algorithmique;* elle ne s'étale que devant l'*œil intérieur;* de là, une haute abstraction, une généralité immense. Ces sciences, en se prêtant mutuellement leurs moyens respectifs, acquièrent les avantages attachés à ces moyens. La géométrie moderne, en empruntant le symbolisme algébrique, a gagné en *généralisation* sans rien perdre ni de sa clarté, ni de sa rigueur. Cette *symbolisation* est même le but principal vers lequel se dirigent, en divers sens, les travaux des grands géomètres contemporains, au nombre desquels l'auteur de la *Géométrie supérieure* tient une place si distinguée. Dans cet ouvrage remarquable, les mots *rapport, proportion, addition, soustraction, égalité, rectangle* ou *produit* sont remplacés par des *signes.* L'addition étant un accroissement de chemin, un mouvement en avant, et la soustraction un mouvement en arrière, les signes + et — peuvent aussi servir à indiquer des *directions opposées.* M. Chasles fait ressortir l'avantage de cette notation pour imprimer aux théorèmes un caractère de généralité et parvenir à de nouveaux théorèmes. Les égalités revêtant les formes d'équations, en les combinant, on remplace la logique traînante de l'ancienne géométrie par le *calcul* rapide des temps modernes.

Depuis longtemps on fait des efforts pour introduire $\sqrt{-1}$ dans la science de l'espace. Les résultats ne sont pas complétement satisfaisants. Mais les fonctions symétriques des racines imaginaires étant *réelles,* lorsqu'il ne s'agit que de ces fonctions, les imaginaires sont, pour ainsi dire, susceptibles d'être construites. C'est ainsi qu'une conique imaginaire a un *centre* réel. M. Chasles se tient dans cette sage réserve.

Laquelle des deux méthodes, géométrique et algébrique, est préférable? Question oiseuse, à laquelle chacun répond selon la tendance de son esprit. Il faut dans chaque cas employer la méthode qui mène promptement et le plus facilement au but, mais toujours en conservant l'inexorable rigueur logique, qui est l'âme de la science. Renoncer à cette rigueur, c'est noyer la science dans le bourbier *utilitaire,* où l'on veut entraîner l'enseignement classique.

Exemple. Lorsqu'on veut circonscrire un cercle à un triangle, on suppose le problème résolu; on considère les côtés comme des cordes; ce procédé est *analytique.* Pour prouver que le point trouvé est également éloigné des sommets, on suit un procédé *synthétique.*

Dans le 23[e] livre, Euclide donne des démonstrations analytiques et synthétiques de chacune des cinq premières propositions, et Pappus consacre presque un livre entier à la géométrie analytique; mais qui n'est pas *cartésienne,* qui n'est pas *algorithmique.* TM.

EXERCICE DE CALCUL.

(Lamé, Leçons sur l'Élasticité des corps, pages 44, 48, 59.)

Soient les douze équations

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1,$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1,$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$
$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0,$$
$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0,$$
$$P_1 = ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2dy_1 z_1 + 2ex_1 z_1 + 2fx_1 y_1,$$
$$P_2 = ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + 2dy_2 z_2 + 2ex_2 z_2 + 2fx_2 y_2,$$
$$P_3 = ax_3^2 + by_3^2 + cz_3^2 + 2dy_3 z_3 + 2ex_3 z_3 + 2fx_3 y_3,$$
$$Q_1 = ax_2 x_3 + by_2 y_3 + cz_2 z_3 + d(y_2 z_3 + z_2 y_3) + e(x_2 z_3 + z_2 x_3) + f(x_2 y_3 + y_2 x_3),$$
$$Q_2 = ax_1 x_3 + by_1 y_3 + cz_1 z_3 + d(z_1 y_3 + y_1 z_3) + e(x_1 z_3 + z_1 x_3) + f(y_1 x_3 + x_1 y_3),$$
$$Q_3 = ax_1 x_2 + by_1 y_2 + cz_1 z_2 + d(y_1 z_2 + z_1 y_2) + e(x_2 z_1 + z_2 x_1) + f(x_1 y_2 + y_1 x_2);$$

éliminant les x, y, z, on obtient les relations

$$P_1 + P_2 + P_3 = a + b + c,$$
$$P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1 - Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2 = ab + bc + ac - d^2 - e^2 - f^2,$$
$$P_1 P_2 P_3 + 2 Q_1 Q_2 Q_3 - P_1 Q_1^2 - P_2 Q_2^2 - P_3 Q_3^2 = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 250

(voir t. XI, p. 45);

PAR M. CASIMIR REY,
De l'Institution Barbet.

1. *Lemme.* Si l'on porte sur une droite, à partir d'un point donné, les quatre racines des deux équations

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0,$$

racines prises avec leurs signes, et si l'on a la relation $2(q+q') = pp'$, les quatre points ainsi déterminés sont en rapport harmonique.

2. THÉORÈME. *Quatre points étant donnés sur une droite, prenant ces points deux à deux, on obtient trois systèmes de deux couples chacun, et à chacun de ces systèmes correspond un couple de points simultanément harmoniques aux deux couples du système; les trois couples ainsi déterminés, pris deux à deux, sont harmoniques entre eux.* (OTTO HESSE.)

Démonstration. Soient quatre points consécutifs :

A, B, C, D sur une droite,
P, Q deux points simult. harmon. aux points A, B; C, D,
R, S *Id.* A, C; B, D,
T, V *Id.* A, D; B, C;

prenons un point O sur la droite; faisons

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \quad OD = d,$$
$$OP = p, \quad OQ = q, \quad OR = r, \quad OS = s, \quad OT = t, \quad OV = v.$$

En vertu du lemme, on a

$$(1) \qquad 2(ab+pq)=(a+b)(p+q),$$
$$(2) \qquad 2(cd+pq)=(c+d)(p+q),$$
$$(3) \qquad 2(ac+rs)=(a+c)(r+s),$$
$$(4) \qquad 2(bd+rs)=(b+d)(r+s).$$

Éliminant a entre les équations (1) et (3), on obtient

$$2(r+s)(bc+pq)+2(p+q)(rs-bc)$$
$$+(c-b)(r+s)(p+q)-4crs+4bpq=0;$$

de même, en éliminant d entre les équations (2) et (4), on obtient

$$2(r+s)(bc+pq)+2(p+q)(rs-bc)$$
$$+(b-c)(r+s)(p+q)-4brs+4cpq=0.$$

Soustrayant ces équations l'une de l'autre, et divisant le reste par $2(b-c)$, on a

$$(r+s)(p+q)=2(rs+pq).$$

Donc, d'après le lemme, les points R, S, P, Q sont en rapport harmonique; on trouve de même

$$(r+s)(t+v)=2(rs+tv),$$
$$(p+q)(t+v)=2(pq+tr). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. Les six points R, S, A, B, C, D sont en involution; de même le système T, V, A, B, C, D et encore quatre autres systèmes.

Note. M. Hesse fait un emploi très-ingénieux de ce problème pour la résolution des équations biquadratiques. (Journal de M. Crelle, t. XLI, p. 263; 1851.)

SECONDE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 118

(voir t. V, p. 167);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur de Mathématiques, à Paris.

THÉORÈME. *Si x désigne l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont y et z sont les deux côtés de l'angle droit, je dis qu'on aura*

$$x^m > \text{ ou } < y^m + z^m,$$

suivant que la valeur algébrique de m est plus grande ou plus petite que 2.

Je ferai remarquer que ce théorème a été démontré, il y a quelques années, dans les *Nouvelles Annales*, t. V, p. 413, 479 et suivantes. On peut, je crois, le démontrer beaucoup plus simplement ainsi qu'il suit.

Première démonstration. On a, par hypothèse,

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

m désignant une grandeur quelconque; si nous multiplions les deux membres de cette égalité par x^{m-2}, nous aurons

$$(1) \qquad x^m = y^2 x^{m-2} + z^2 . x^{m-2}.$$

Cela posé, supposons d'abord que la valeur algébrique de m soit plus grande que 2; dès lors, x étant plus grand que y et que z,

$$y^2 x^{m-2} + z^2 x^{m-2} > y^2 . y^{m-2} + z^2 . z^{m-2},$$

et, par suite,

$$x^m > y^m + z^m;$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Supposons, en second lieu, que la valeur algébrique de m soit plus petite que 2. Alors écrivons l'égalité (1) sous la forme

$$x^m = y^2 \frac{1}{x^{2-m}} + z^2 \frac{1}{x^{2-m}},$$

et, comme on a évidemment

$$y^2 \frac{1}{x^{2-m}} + z^2 \frac{1}{x^{2-m}} < y^2 \frac{1}{y^{2-m}} + z^2 \frac{1}{z^{2-m}},$$

il s'ensuit que

$$x^m < y^m + z^m;$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Seconde démonstration. En désignant par a et b deux fractions proprement dites, posons

$$y = ax \quad \text{et} \quad z = bx;$$

d'où

$$(2) \qquad y^m + z^m = x^m(a^m + b^m).$$

Si, dans cette égalité, on fait $m = 2$, on aura évidemment

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Cela posé, supposons d'abord que la valeur algébrique de m soit plus grande que 2; dès lors, a^m et b^m étant respectivement moindres que a^2 et b^2, on aura

$$a^m + b^m < 1,$$

et, par suite, la relation (2) donne

$$x^m > y^m + z^m.$$

Supposons, en second lieu, que la valeur algébrique de m soit plus petite que 2; dès lors, a^m et b^m étant respectivement plus grands que a^2 et b^2, on a

$$a^m + b^m > 1,$$

et, par suite, la relation (2) donne

$$x^m < y^m + z^m.$$

Cas particuliers. Dans l'hypothèse où $m = 3$, on a

$$x^3 > y^3 + z^3.$$

Sous le point de vue géométrique, cette égalité montre que le cube construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus grand que la somme des cubes construits sur les deux côtés de l'angle droit.

SOLUTION DE LA QUESTION 244

(voir t. X, p. 358);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

THÉORÈME. *Dans un produit de n facteurs monômes, on ne peut changer que* $2^{n-1}-1$ *fois les signes des facteurs, soit en totalité, soit en partie, sans changer le signe du produit.*

Démonstration. Le signe du produit ne change pas, si les facteurs qui changent de signe sont en nombre pair. Mais deux facteurs sur n peuvent être choisis de $\frac{n(n-1)}{1.2}$ manières; quatre facteurs peuvent être choisis de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ manières; et ainsi de suite. D'ailleurs, on a

$$1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\ldots$$
$$=\frac{(1+1)^n+(1-1)^n}{2}=2^{n-1};$$

donc les signes des facteurs peuvent être changés de $2^{n-1}-1$ manières.

Observation. M. Casimir Rey démontre le même théorème par des considérations combinatoires.

SUR LES HÉLICES;

PAR M. A. TISSOT,
Docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. Pour que le lieu des centres de courbure d'une hélice H, tracée sur un cylindre, soit une autre hélice H', tracée sur un cylindre parallèle au premier, il faut et il suffit que la section droite de celui-ci soit un cercle ou une spirale logarithmique.

L'axe des z étant parallèle aux génératrices, et les deux autres étant perpendiculaires entre eux et au premier, soient, pour un point quelconque de H :

x, y, z ses coordonnées,
x', y', z' celles du centre du cercle osculateur,
ρ le rayon de courbure de la section droite.

On sait que le rayon de courbure de l'hélice est parallèle à ce dernier, et qu'il a pour longueur $\rho(1+\tang^2\alpha)$, α désignant le complément de l'angle sous lequel H coupe les arêtes du cylindre; on a donc

$$z'=z \quad \text{et} \quad (x'-x)^2+(y'-y)^2=(1+\tang^2\alpha)^2\rho^2,$$
$$(x'-x)dx+(y'-y)dy=0.$$

Si l'on pose

$$ds^2=dx^2+dy^2, \quad ds'^2=dx'^2+dy'^2,$$

ces équations donneront

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x - (1 + \text{tang}^2\alpha)\rho\,\dfrac{dy}{ds}, \\ y' = y + (1 + \text{tang}^2\alpha)\rho\,\dfrac{dx}{ds}; \end{cases}$$

d'où l'on tire, en différentiant, puis en ajoutant membre à membre, après avoir élevé au carré,

$$(2)\qquad ds'^2 = \text{tang}^4\alpha\,ds^2 + (1 + \text{tang}^2\alpha)^2\,d\rho^2.$$

D'ailleurs, pour que le lieu des centres de courbure de H soit une autre hélice, dont la tangente fasse avec le plan des xy un angle constant α', il faut qu'on puisse satisfaire à la condition

$$dz' = \text{tang}\,\alpha'\,ds';$$

et, comme on a

$$dz' = dz, \quad dz = \text{tang}\,\alpha\,ds,$$

cette condition donne

$$(3)\qquad ds' = \text{tang}\,\alpha\,\text{cotang}\,\alpha'\,ds.$$

On voit donc, à l'aide des équations (2) et (3), que, si l'on pose

$$k^2(1 + \text{tang}^2\alpha)^2 = \text{tang}^2\alpha\,(\text{cotang}^2\alpha' - \text{tang}^2\alpha),$$

il faudra qu'on ait

$$(4)\qquad d\rho = k\,ds.$$

Ainsi, à partir de l'origine des arcs, le rayon de courbure de la section droite du cylindre doit croître proportionnellement à la longueur de ces arcs.

2. Soit

$$(5)\qquad dy = p\,dx;$$

si l'on introduit, dans l'équation (4), les expressions

$$\rho = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}, \quad ds = \sqrt{1 + p^2}\,dx,$$

et qu'on prenne p pour variable indépendante, elle deviendra

$$(1+p^2)\frac{d^2x}{dp^2}+(3p-k)\frac{dx}{dp}=0;$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'équation (5) et en représentant par c, c', c'' trois constantes arbitraires,

$$x-c'=c\,\frac{p+k}{\sqrt{1+p^2}}\,e^{k\,\mathrm{arc\,tang}\,p},$$

$$y-c''=c\,\frac{kp-1}{\sqrt{1+p^2}}\,e^{k\,\mathrm{arc\,tang}\,p}.$$

Si l'on divise membre à membre, et qu'on choisisse l'origine des coordonnées de manière à faire disparaître c' et c'', on aura donc

$$\frac{x}{y}=\frac{p+k}{kp-1},$$

ou bien, en remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, et en introduisant les coordonnées polaires,

$$dr=krd\theta.$$

Cette équation a pour intégrale

$$r=\mathrm{R}e^{k\theta},$$

R étant une nouvelle constante; elle représente, par conséquent, une spirale logarithmique. Pour $k=0$, c'est-à-dire pour $\alpha'=90^\circ-\alpha$, elle donne un cercle.

3. Si l'on remplace, dans les équations (1), x et y par leurs valeurs, en fonction de r et de θ, déduites de ce qui précède, il viendra

$$x'=-(1+\mathrm{tang}^2\alpha)\,(k\sin\theta+\sin^2\alpha\cos\theta)\,r,$$

$$y'=(1+\mathrm{tang}^2\alpha)\,(k\cos\theta-\sin^2\alpha\sin\theta)\,r.$$

De ces nouvelles expressions, on peut conclure facile-

ment que, k étant différent de zéro, la section droite du cylindre, sur lequel se trouve placée la seconde hélice H′, est une spirale logarithmique de forme identique avec la première et ayant même pôle.

Il en résulte que les deux hélices sont situées sur deux cônes de révolution, dont les axes et les sommets coïncident, et dont les compléments λ et λ' des demi-angles au sommet satisfont à la relation

$$\tan\alpha \tan\lambda' = \tan\alpha' \tan\lambda;$$

car, en appelant ω l'angle que fait, dans les deux spirales, la tangente en un point quelconque de la courbe, avec la ligne qui joint ce point au pôle, on doit avoir

$$\tan\alpha = \tan\lambda \cos\omega,$$
$$\tan\alpha' = \tan\lambda' \cos\omega.$$

Enfin, si la première hélice coupe les génératrices du cône sous l'angle de 45 degrés, il en sera de même de la seconde, et les deux cônes se confondront; on aura alors

$$\alpha = \alpha', \quad \lambda = \lambda', \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\lambda, \quad k^2 = \cos 2\alpha.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Théorie générale des approximations numériques, a l'usage des candidats aux Écoles spéciales du Gouvernement; par *M. J. Vieille*, agrégé près la Faculté des Sciences de Paris, maître des conférences à l'École Normale, chevalier de la Légion d'honneur; 1852; in-8° de 100 pages. (Imprimerie de Bachelier.)

Dieu seul est grand! dit Bossuet. On peut ajouter que

Dieu seul connaît la vraie grandeur de toutes choses. L'homme, cet être éphémère, qui était hier un atome organique, qui sera demain un morceau de fumier, et qui est aujourd'hui un sot orgueilleux qui se croit quelque chose, εἶναί τι, comme dit l'Apôtre, l'homme ne possède l'appréciation exacte d'aucune grandeur. Qu'il pèse, qu'il mesure, qu'il calcule, les résultats sont entachés d'erreurs, approchent de la vérité, mais ne sont pas la vérité *vraie*, comme s'expriment les diplomates, avec cette différence, que le *fin* de la diplomatie consiste à s'éloigner le plus qu'on peut de la vérité vraie, tandis que le but constant du géomètre est de s'en approcher le plus strictement possible, en deçà et au delà, et de resserrer les deux limites de plus en plus. Une de ces limites donne une erreur par *excès* et l'autre par *défaut*. La somme de ces deux erreurs est évidemment égale à la différence des deux limites. Donc une de ces erreurs est moindre que la moitié de la différence des deux limites; il faut donc une première méthode pour rendre cette différence aussi petite que l'on veut. Lorsqu'on combine par les procédés arithmétiques plusieurs de ces quantités approchées, le résultat sera renfermé aussi entre deux limites. Une seconde méthode consiste à découvrir d'avance la différence de ces deux limites. Enfin, lorsque cette différence est prescrite, il faut une troisième méthode pour découvrir avec quel degré d'approximation il faut calculer les quantités à combiner pour que le résultat se trouve entre les limites prescrites. Ces trois méthodes sont l'objet principal de la *Théorie générale des approximations*.

Cette *théorie* consiste dans une exposition rigoureuse et complète de tout ce qu'on a écrit sur cette matière, avec de notables simplifications et améliorations, et augmentée de nouvelles considérations sur l'erreur *relative*. On appelle ainsi le quotient qu'on obtient en divisant l'erreur commise

sur une quantité par cette quantité. L'auteur dit avec raison : « C'est ce rapport seul, et non l'erreur *absolue*, qui » caractérise nettement le degré d'approximation obtenu. » Il ne suffirait pas de savoir, par exemple, que, dans la » mesure d'une longueur, on a fait une erreur moindre » que de 1 centimètre, pour en conclure que la mesure » est bien prise ; car, tandis que cette erreur sera regar- » dée comme négligeable pour une longueur de 10 mètres, » la même erreur sera, au contraire, très-notable s'il » s'agit d'une longueur de 1 mètre » (page 2).

Les divers théorèmes d'*approximation* appliqués aux opérations arithmétiques sont tous *implicitement* fondés sur ce qu'un nombre est un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de 10, en allant de gauche à droite, et que les coefficients sont des entiers positifs, ne pouvant avoir que les dix valeurs de *zéro* à *neuf*.

Voici le premier théorème : *Si un nombre est calculé avec m chiffres exacts, à partir du chiffre significatif k des plus hautes unités, l'erreur relative sera moindre que la fraction* $\frac{1}{k.10^{m-1}}$.

La démonstration revient à ceci : le nombre donné est de la forme

$$k.10^p + l.10^{p-1} + \ldots f 10^{p-m+1} + \ldots;$$

les m coefficients $k, l, \ldots, f$ sont exacts ; ceux qui suivent ne sont pas sûrs. Représentons cette partie non exacte par α ; c'est l'erreur ; on a évidemment

$$\alpha < 10^{p-m+1};$$

et le nombre cherché étant représenté par a, quel qu'il soit, on a

$$a > k.10^p.$$

Donc

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{k.10^{m-1}},$$

$\frac{\alpha}{a}$ est l'erreur relative, et à fortiori

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{10^{m-1}}.$$

Si l'on sait à priori que

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{(k+1)\,10^{m-1}},$$

on est sûr que les m chiffres sont exacts. En effet,

$$a < (k+1)\,10^{m-1};$$

donc

$$\alpha < 1.$$

C'est l'objet d'un second théorème.

L'auteur applique ces théorèmes aux quatre premières opérations de l'arithmétique, et donne des règles simples pour la multiplication et la division abrégées. Comme exemple d'addition, l'auteur calcule

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$

et a égard : 1° aux termes négligés; 2° aux chiffres négligés dans la réduction des fractions en fractions décimales; 3° à la partie décimale qu'on néglige dans le résultat. Cela peut donner une idée de la marche sévère de l'auteur.

Dans la multiplication, on donne à calculer avec quatre chiffres exacts la longueur de la circonférence qui a pour rayon le côté du décagone régulier étoilé, inscrit dans le cercle dont le rayon est 1 (page 32), c'est-à-dire le nombre $\pi(\sqrt{5}+1)$.

Les exemples pour les extractions de racines sont : 1° calculer avec trois chiffres exacts l'expression $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; 2° $\sqrt[3]{\frac{374300}{\pi}}$ à une unité près.

L'auteur établit cette règle générale, de pratique facile : Dans tout calcul de multiplication, de division, d'élévation aux puissances, d'extraction de racines, si l'on veut que le résultat final présente m chiffres exacts, $m+2$ chiffres suffisent toujours pour chacun des termes ou des termes des facteurs qui entrent dans le produit (pages 23, 35, 46, 48).

Dans la division abrégée, l'erreur du quotient réduit à ses m premiers chiffres a pour limite une fraction de l'unité du $m^{ième}$ chiffre, fraction marquée par $\frac{m-2}{100}$ (pages 39-43).

Toutes les approximations précédemment exposées dérivent d'une formule générale, fondée sur le théorème de Taylor (page 81). L'auteur applique cette formule générale à la règle de *fausse position*, et au calcul approché des racines des équations numériques, algébriques et transcendantes, et la méthode est rectifiée par la considération du terme $\frac{h^2}{1.2}\frac{f''(a+h\theta)}{f'a}$ (page 91). En regard de cette méthode, on a placé les formules de M. Cauchy, qui dispensent de toute hypothèse sur la dérivée seconde. L'auteur pense que ces formules ne sont pas préférables aux précédentes, que, du moins, il est des cas où elles ne fournissent pas une approximation aussi rapide.

On donne pour exemples : 1° l'emploi des parties proportionnelles dans le calcul par logarithmes; 2° l'équation

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0;$$

une racine est comprise entre 1,80159 et 1,80195; 3°

$$\text{tang}\, x - x = 0, \quad x = 257^\circ\, 27',$$

à une demi-minute près.

Il aurait peut-être fallu donner quelques notions sur les méthodes d'approximation *graphiques* en usage dans les services publics.

Cet opuscule, de 100 pages, est un ouvrage plus instructif que certains gros volumes, où l'on trouve pléthore de paroles et maigreur de pensées.

En terminant, nous ferons observer que tous les procédés d'approximation exigent, dans chaque cas particulier, que le calculateur fasse usage de sagacité ; faculté dont les règles ne dispensent pas, et qu'elles ne peuvent donner.

SUR LE QUADRILATÈRE CIRCONSCRIPTIBLE, ET SUR L'ÉGALITÉ DES POLYGONES;

PAR M. G.-H. NIEVENGLOSKI,
Répétiteur au lycée Saint-Louis.

On lit dans les *Nouvelles Annales*, tome IX, page 366: *Tout quadrilatère dans lequel la somme de deux côtés quelconques est égale à la somme des deux autres, ou dans lequel la différence des deux côtés quelconques est égale à la différence des deux autres, est circonscriptible à un cercle; et réciproquement.*

La proposition ainsi énoncée n'est pas exacte. En effet, dans tout parallélogramme, la différence des deux côtés, même quelconques, est égale à la différence des deux autres, et pourtant le parallélogramme n'est pas circonscriptible en général.

Il faut distinguer :

1°. Dans tout quadrilatère CIRCONSCRIT à un cercle, la somme des deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres; et réciproquement.

2°. Dans tout quadrilatère EX-CIRCONSCRIT à un cercle, la somme des deux côtés, qui forment l'angle ex-circonscrit, est égale à la somme des deux autres.

Quant à la réciproque du second théorème, elle est vraie dans les quadrilatères non convexes.

On lit, dans les Traités de géométrie, que *deux polygones de n côtés sont égaux quand ils ont n côtés égaux, comprenant n — 3 angles* CONSÉCUTIFS *égaux, etc.*

Cet énoncé renferme une restriction inutile. Il n'est pas nécessaire, pour l'égalité des polygones, que les angles égaux soient *consécutifs*, il suffit qu'ils soient homologues. Pour le démontrer, joignez, par les diagonales, les sommets des angles dont l'égalité n'est pas donnée; les polygones partiels qui en résulteront seront évidemment égaux, et, par suite, il en sera de même pour les deux polygones proposés.

Le théorème ainsi corrigé est vrai sur la sphère.

SOLUTION DE LA QUESTION 237;

PAR M. TH. LOXHAY,
Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

L'énoncé doit être modifié de la manière suivante : Soit

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n_q = \frac{n!}{(n-q)! \times q!};$$

on a

$$S_n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} - n_3 S_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 S_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(ARNDT.)

Solution. Si l'on développe la $n^{ième}$ puissance de $(x-1)$, on aura, en employant les notations indiquées dans l'énoncé de la question,

$$(x-1)^n = x^n - n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 x + (-1)^n;$$

retranchant du second membre le développement de $(1-1)^n$, qui n'est autre chose que zéro, il en résultera

$$(x-1)^n = x^n - 1 - n_1(x^{n-1}-1) + n_2(x^{n-2}-1) + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 (x-1).$$

Divisant les deux membres par $(x-1)$, multipliant par dx, et intégrant entre les limites 0 et 1, on obtiendra

$$\int_0^1 (x-1)^{n-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}\,dx - n_1 \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\,dx + n_2 \int_0^1 \frac{x^{n-2}-1}{x-1}\,dx + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 \int_0^1 dx\,;$$

mais

$$\int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}\,dx = S_n, \quad \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\,dx = S_{n-1}, \ldots, \quad \int_0^1 dx = S_1.$$

Donc enfin,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} = S_n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 S_1.$$

Note. La formule est une application particulière de la formule générale

$$\Delta^n y_0 = y_n - n_1 y_{n-1} + n_2 y_{n-2} - \ldots$$ (PROUHET.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie et Arithmétique.

Calcul des probabilités.

Déterminants.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie pratique et descriptive.

Géométrie sphérique.

Trigonométrie plane et sphérique.

Géométrie de l'espace; lignes et surfaces.

Pages.

Géométrie des lignes planes.

Géométrie de situation.

Mécanique.

Calcul aux différences; sommation.

Calcul infinitésimal; séries.

Questions proposées.

Questions résolues.

Physique mathématique.

Bibliographie et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

(*) L'importance extrême attachée à des accessoires de faible importance, le vague et la multiplicité ridicule des coefficients, véritable macédoine, ont ôté aux chiffres de classement toute espèce de signification. La faiblesse inouïe des questions, chaussure à tout pied, donnant nécessairement des résultats uniformément médiocres, il serait aussi judicieux et plus expéditif de mettre les noms des élèves dans une urne et de s'en rapporter à l'impartialité du sort. Il est de toute certitude qu'aujourd'hui Ampère, Laplace, Lagrange, Napoléon, Poisson, etc., seraient déclarés inadmissibles à l'École Polytechnique. La limite de l'absurde est dépassée.

